1998年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

一般化安定集合問題

01306430 電気通信大学　田村 明久 Akihisa TAMURA

1　一般化安定集合問題とは

まず、一般化安定集合問題とはどのような問題かを説明しましょう。次のような0－1整数計画問題

$$\begin{array}{lll} \text{最大化} & \sum_{j=1}^{n} w_j x_j & \\ \text{制約条件} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & i = 1, \cdots, m \\ & x_j \in \{0, 1\} & j = 1, \cdots, n \end{array}$$

において、各制約不等式の左辺の非ゼロ係数が高々2つとします。このとき、それぞれの制約不等式を次の3つの型

$$\begin{array}{rcr} x_i + x_j & \le & 1 \\ -x_i - x_j & \le & -1 \\ x_i - x_j & \le & 0 \end{array}$$

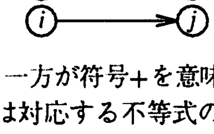
のどれか置き換えても、本質的に等価な問題になります。第1の型は「x_iまたはx_jの高々1つしか1にならない」という2変数パッキング条件であり、第2の型は「どちらか一方は1である」という2変数カバリング条件で、第3の型は「x_iが1ならx_jも1である」という条件です。このような3つの型の不等式制約条件からなる0－1整数計画問題を一般化安定集合問題とよびます。すなわち、$N = \{1, \cdots, n\}$, $P, C, I \subseteq N \times N$および$(w_1, \cdots, w_n)$に対して、

$$\begin{array}{llrcrl} \text{最大化} & \sum_{j=1}^{n} w_j x_j & & & & \\ \text{制約条件} & & x_i + x_j & \le & 1 & (i,j) \in P \\ & & -x_i - x_j & \le & -1 & (i,j) \in C \\ & & x_i - x_j & \le & 0 & (i,j) \in I \\ & & & & x_j \in \{0, 1\} & j \in N \end{array}$$

という問題を**一般化安定集合問題**とよびます。

一般化安定集合問題のそれぞれの制約不等式は左辺にちょうど2つの変数を持つため、制約条件に対応して次のような辺を定義することで、Nを頂点集合とする特殊なグラフを用いて表現することができます。

$x_i + x_j \le 1 \iff$
$-x_i - x_j \le -1 \iff$
$x_i - x_j \le 0 \iff$



矢尻が符号−を意味し、もう一方が符号+を意味すると思えば、各辺の2つの符号は対応する不等式の左辺の係数の符号に一致します。このような3つの型の辺を持つグラフを**双向グラフ** (bidirected graph) といいます。双向グラフの各頂点iに重みw_iと変数x_iを付加させれば、一般化安定集合問題は双向グラフを用いて表現できるわけです。

無向グラフは第1の型の辺のみからなる双向グラフとみなすことができますが、入力が無向グラフである一般化安定集合問題を考えましょう。第1型の不等式は「2つの変数の高々1つが1である」を意味するわけですが、グラフ的な表現をすれば「第1型の辺の両端点の高々1つが選ばれる」となります。ここでは、頂点を選ぶなら対応する変数を1とし、選ばないなら0とします。制約条件を満たすように選ばれた頂点の集合は互いに隣接することはなく、このような頂点の集合を**安定集合**といいます (独立集合などともいいます)。すなわち、無向グラフが入力の場合の一般化安定集合問題は、頂点に付加された重みの総和を最大にする安定集合を求める問題になります。これは、**最大重み安定集合問題**といわれる有名な組合せ最適化問題です。上記のような理由で、一般化安定集合問題とよぶことにしました。

2　推移的単純双向グラフ

最大重み安定集合問題では、入力の無向グラフが異なれば問題も異なります。しかし、一般化安定集合問題では、入力の双向グラフが異なっても問題が本質的に等価な場合があります。例えば、$x_1 + x_2 \le 1$と$-x_2 - x_3 \le -1$という2つの制約不等式からなる問題と、これにさらに$x_1 - x_3 \le 0$という不等式を制約に加えた問題は同じです。なぜなら、第3の不等式は第1不等式と第2不等式の辺々の和を取ることで得られます。本質的に等価な問題をまとめて扱うために、入力である双向グラフとしてある種の標準形を考えます。ここで扱う標準形は、2つの条件を満たすもので [2] で提案されているものです。

まずは、上の例のように存在する不等式から辺々の和を取るという操作で得られる不等式は、もともと含まれているとします。これを双向グラフで表現すると次のようになります。

推移性:　任意の2辺$e_1 = \{i, j\}$と$e_2 = \{j, k\}$に対してこれらがjで異なる符号を持つとき、i, kに接続した辺e_3で両端の符号がe_1, e_2の符号と一致するようなものが存在する。

与えられた双向グラフを推移性を満たすように変形するのは頂点数に関する多項式時間でできますから、以下では推移的双向グラフだけを扱うことにします。

仮に、推移的双向グラフの頂点iに、2種類の自己ループ、両端での符号が共に+のものと両端での符号が共

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

に−のものが接続していたと仮定しましょう。これらの自己ループに対応する不等式は $x_i+x_i \leq 1$, $-x_i-x_i \leq -1$ で、これを満たす整数値存在しません。すなわち、一般化安定集合問題は実行不可能です。実はこの逆も成り立つことが知られています [2]。

また実行可能なときに、頂点 i に両端での符号が共に+である自己ループが接続すると x_i の整数性から x_i は0に固定されます。同様に、両端の符号が共に−である自己ループや異なる型の多重辺が存在する場合は、幾つかの変数の値が固定でき、問題を小さくできることが知られています [2]。そこで標準形では、

単純性: 自己ループや多重辺を持たない。

を仮定します。

3 多項式時間で解ける場合

一般化安定集合問題は、最大重み安定集合問題を特殊な場合として含みますからＮＰ困難です。最大重み安定集合問題に対しては、入力無向グラフがパーフェクトである場合 [1] やクローフリーである場合 [3]（重みつきの場合は修正が必要）に多項式時間で解けることが知られています。同様に一般化安定集合問題に対しても、双向グラフがパーフェクトあるいはクローフリーなら多項式時間解法が存在します [5, 4]。

双向グラフがパーフェクトあるいはクローフリーとは以下のように定義します。与えられた双向グラフに対して、各辺を第１型にすべて置き換えて得られる無向グラフを対応する無向グラフとよぶことにします。双向グラフが推移的かつ単純であり、対応する無向グラフが性質Ｐをもつとき、その双向グラフが性質Ｐをもつをいうことにします。例えば、対応する無向グラフがパーフェクトならその双向グラフもパーフェクトといいます。

ここでは、上記の２つの解法を簡単に説明しましょう。パーフェクト双向グラフに対する解法は、次の２つの事実に基づきます：「一般化安定集合問題は、最大重み安定集合問題に多項式時間で変形でき、後者の最適解から元の最適解が多項式時間で計算できる」、「この変形はパーフェクト性を保存する」。重要なのは後者の性質です。クローフリー双向グラフに対しては、この論法が通用しません。一般化安定集合問題から最大重み安定集合問題への変形の仕方は幾つかありますが、クローフリー性を保存するものは今のところありません。２つ目の解法は、Minty の解法 [3] を拡張したものです。少し複雑なため詳しくは説明できませんが、線形目的関数の最大化に分数計画の技法を使うところが面白いと思っています。

4 おわりに

双向グラフがパーフェクトあるいはクローフリーならば、一般化安定集合問題は多項式時間で解けることを紹介しました。この２つの事実から次のような予想が考えられます。

予想 ある無向グラフのクラスに対して、最大重み安定集合問題が多項式時間で解けるなら、対応する無向グラフがこのクラスに含まれる双向グラフに対しては一般化安定集合問題も多項式時間で解ける。

２つの事例から予想しているので、強い確信があるわけではないのですが考えてみると面白いと思います。興味があったら是非チャレンジして下さい。

一般化安定集合問題は、最大重み安定集合問題に比べて幾つかの整数計画問題を容易に記述することができます。一般化安定集合問題は最大重み安定集合問題に変形できるわけですから、これらの整数計画問題は最大重み安定集合問題としても記述できます。しかし、この変形は変数の数が増えるなどのことから、問題を実際に解くという立場からはあまり歓迎できるものではありません。最大重み安定集合問題に対しては、多くの研究が成されています。解法にしても有用なものを一般化安定集合問題向きに拡張し用いることで、幾つかの応用問題がより効率的に解けるのではないかと願っています。

References

[1] Grötschel, M., Lovász, L. and Schrijver, A., (1988), *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer, Berlin.

[2] Johnson, E. L. and Padberg, M. W., (1982), "Degree-two inequalities, clique facets, and biperfect graphs," *Annals Discrete Mathematics*, **16**, 169–187.

[3] Minty, G. J., (1980), "On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs," *J. Combin. Theory Ser. B*, **28**, 284–304.

[4] Nakamura, D. and Tamura, A., (1998), "The generalized stable set problem for claw-free bidirected graphs," in: Bixby, R.E., Boyd, E.A. and Ríos-Mercado, R.Z. (eds.) *Integer Programming and Combinatorial Optimization*, Lecture Notes in Computer Science 1412, Springer, 69–83.

[5] Tamura, A., (1997), "The generalized stable set problem for perfect bidirected graphs," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **40**, 401–414.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．