

## 総量制約をもつ凹最大化問題の効率的解法

1504810 防衛大学校 \*宝崎隆祐 1000890 防衛大学校 飯田耕司

## 1. はじめに

本報告は、手持ちの資源総量に制約がある場合の最適化問題を取り扱っており、一種の資源配分問題について議論したものである。資源配分問題は、資源総量の制約の下で分離可能な目的関数を最適化する問題を主問題として持っている[2]。一方、非線形計画問題[3]や大域的最適化問題[1]では問題をより一般的に取り扱うことが多く、問題を特殊化したとしても、たかだか目的関数や制約関数の凸性等を仮定した凸計画問題のように、かなり一般論的な理論や手法の議論が主となっている。ここで扱う問題は、資源配分問題と非線形計画問題の狭間にあつて、前者が主として扱っている問題よりは一般的であるが、後者の扱う問題よりは特殊な形をもった問題である。すなわち、資源には重み付きの総量制約が課せられているが、必ずしも分離可能ではない凹関数を最大化する問題である。この問題の最適解を数値的に導出することには非線形計画法におけるいくつかの解法が適用できるが、ここでは、これらのよく知られた解法よりは計算時間の面で高速な2つの解法を提案する。

## 2. 問題の定式化と最適解

総量の制約された資源により最大の効果をあげるように図る最適化問題はいたるところに存在する。ここでは、以下のような仮定の下で、非負条件と重み付き総量制約がある場合の凹関数  $f(x)$  の最大化問題を考える。

$$(P0) \quad \max_x f(x) \quad \text{s.t.} \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n c_i x_i \leq M. \quad (1)$$

(仮定1) 関数  $f(x)$  は、 $n$ 次元変数  $x \in R^n$  に対し有界で、かつ狭義凹関数である。また、この関数には2階偏導関数が存在し、かつそれは連続であるとする。

(仮定2)  $c_i \leq 0$  であれば  $x_i$  を限りなく大きくできるから、 $c_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  とする。また、 $M > 0$  である。

許容領域を  $\Psi_M = \{x \in R^n \mid x_i \geq 0, \sum_i c_i x_i \leq M\}$  で表すことにする。問題の目的関数は狭義凹関数であり、許容領域  $\Psi_M$  は有界閉凸領域であるから、(P0) は唯一の最適解をもち、その必要十分条件は Kuhn-Tucker 条件により与えられる。ラグランジュ乗数  $\lambda$  を用いて、その条件を分かりやすい形にすると次の定理となる。

**定理 1 (最適解の必要十分条件)**  $x \in \Psi_M$  が最適であるための必要十分条件は、次式を満たす  $\lambda \geq 0$  が存在することである。すなわち、 $i = 1, \dots, n$  に対して、

$$x_i > 0 \quad \text{ならば} \quad \frac{1}{c_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda, \quad x_i = 0 \quad \text{ならば} \quad \frac{1}{c_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \leq \lambda, \quad (2)$$

$$\text{かつ} \quad \lambda > 0 \quad \text{ならば} \quad \sum_{i=1}^n c_i x_i = M. \quad (3)$$

前述したように、この定理を満足する最適解は唯一存在する。 $f(x)$  は狭義凹関数であるから、 $\partial f / \partial x_i / c_i$  は  $x_i$  の単調減少関数であり、これを  $x_i$  に着目して  $\rho_i(x_i; x_{-i})$  と表現する。記号  $x_{-i}$  は、 $x_i$  以外の  $x_j$ ,  $j \neq i$  からなる変数ベクトルであることを表している。この関数の  $x_i$  に対する単調減少性から、任意の  $\lambda \geq 0$  に対し逆関数  $\rho_i^{-1}(\lambda; x_{-i})$  が定義できる。この逆関数を用いることにより、(2) 式を満足する最適解  $x$  は次のように表される。ただし、記号  $[ ]^+$  は、 $[z]^+ = \max\{0, z\}$  を表す。

$$x_i = [\rho_i^{-1}(\lambda; x_{-i})]^+. \quad (4)$$

問題 (P0) の総量制約  $M$  と最適なラグランジュ乗数  $\lambda$  との関係に関して、次の補題が成り立つ。ただし、総量制約を明示する意味で、総量制約  $M$  の問題 (P0) を  $(P_M)$  で、その最適値を  $f_M$  で表すことにする。

**補題 1** 問題  $(P_M)$  の総量制約  $M$  と最適な  $\lambda$  との間に、次のような単調な関係が成り立つ。

(i)  $\lambda \rightarrow \infty$  とすれば、定理 1 の条件を満たす最適解は  $x = \{0, \dots, 0\}$  である。すなわち、そのときの総量制約として  $M = 0$  が対応する。

(ii) 総量制約  $M_1 > M_2 > 0$  に対する問題  $(P_{M_1}), (P_{M_2})$  の最適ラグランジュ乗数がそれぞれ  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  であるとすると、 $\lambda_1 < \lambda_2$  である。

- (iii) 問題 $(P_M)$ の最適解が $x^*$ 、最適ラグランジュ乗数が $\lambda^* = 0$ であるとする。このとき、解の総量 $C = \sum_{i=1}^n c_i x_i^*$ に対し、 $C \leq M'$ なる任意の $M'$ の総量制約をもつ問題 $(P_{M'})$ の最適解は $x^*$ と変わらず、最適ラグランジュ乗数も $\lambda^* = 0$ と変わらない。すなわち、ラグランジュ乗数 $\lambda^* = 0$ に対応する総量制約の中で最小のものが $C$ であり、これを限界総量と呼ぶ。

### 3. 解法アルゴリズム

#### (1) 勾配完結法

この解法は、総量制約条件(3)を満足する実行可能解を生成しながら、最終的に目的関数の勾配に関する条件(2)を満足させようとする解法であり、これを勾配完結法と呼ぶ。

いま、実行可能解 $x \in \Psi_M$ があるとし、これから次のように新しい実行可能解 $y \in \Psi_M$ を作る。もし $\sum_i c_i [\rho_i^{-1}(0; x_{-i})]^+ \leq M$ ならば、 $\lambda = 0$ とおく。そうでなければ、 $\sum_i c_i [\rho_i^{-1}(\lambda; x_{-i})]^+ = M$ となる $\lambda$ を求める。このように決定した $\lambda$ を使って、 $y_i = [\rho_i^{-1}(\lambda; x_{-i})]^+$ 、 $i = 1, \dots, n$ により $y$ を作成する。もし、 $y = x$ であれば(4)式が満足されたことになるから、この $x$ が最適解にほかならない。 $y \neq x$ ならば、 $y$ からさらに新しい解を作ることにより、最適解への収束列を作成してゆく。全体のアルゴリズムは以下のとおりである。

(Step1)  $j = 0$ とし、初期解を $x^0 = \{0, \dots, 0\}$ とおく。

(Step2)  $x = x^j$ において、上の方法により $y \in \Psi_M$ を作成する。 $y = x^j$ ならば、終了。最適解は $y$ である。そうでなければ、次のステップへいく。

(Step3) 直線探索 $f(x^j + \theta^*(y - x^j)) = \max_{0 < \theta \leq \bar{\theta}} f(x^j + \theta(y - x^j))$ を行う。ただし、 $\bar{\theta}$ は $x^j + \theta(y - x^j)$ の実行可能性を保証する上限であり、 $\bar{\theta} \geq 1$ である。

$x^{j+1} = x^j + \theta^*(y - x^j)$ とおき、 $j = j + 1$ として(Step2)へ戻る。

このアルゴリズムにより、目的関数を単調に増加させる許容解の列が生成され、最終的には唯一の最適解 $x^*$ に収束することが証明できる。

#### (2) 総量完結法

この解法は、ラグランジュ乗数と最適解との単調な関係を述べた補題1を利用し、乗数 $\lambda$ を変化させながら、それに対応する一時的な最適解 $x^{\lambda*}$ を求めつつ、最終的に総量に関する条件式(3)を満足させようとする方法であり、総量完結法と呼ぶ。一時的最適解 $x^{\lambda*}$ の導出方法は、任意の初期解 $x^0$ から出発し、(4)式を用いた次の漸化式により $x^j$ 、 $j = 1, 2, \dots$ を生成してゆけば、 $x^{\lambda*}$ に収束させることができる。

$$x_i^{j+1} = [\rho_i^{-1}(\lambda; x_{-i}^j)]^+, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

全体のアルゴリズムは以下のとおりである。まず、 $\lambda$ の下限、上限に関する次の2つの値を定義しておく。

$$\underline{\lambda}_0 = 0, \quad \bar{\lambda}_0 = \max_i \{\rho_i(0; \mathbf{o})\}. \quad (6)$$

(Step1)  $\lambda = 0$ に対応した $x^{\lambda*}$ を求める。 $\sum_i c_i x_i^{\lambda*} \leq M$ ならば、終了。 $x^{\lambda*}$ が最適解である。

(Step2)  $\lambda = (\bar{\lambda}_0 + \underline{\lambda}_0)/2$ とする。

(Step3)  $\lambda$ に対する最適解 $x^{\lambda*}$ を求める。 $\sum_i c_i x_i^{\lambda*} = M$ ならば、終了。現在の $x^{\lambda*}$ が最適である。

(Step4)  $\sum_i c_i x_i^{\lambda*} > M$ ならば $\underline{\lambda} = \lambda$ とし、 $\sum_i c_i x_i^{\lambda*} < M$ ならば $\bar{\lambda} = \lambda$ とする。 $\lambda = (\underline{\lambda} + \bar{\lambda})/2$ により $\lambda$ を更新し、(Step3)へ戻る。

### 4. 数値例

数値例については、発表会の当日紹介する。

## 参考文献

- [1] Horst, R., Pardalos, P.M. and Thoai, N.V., *Introduction to Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, London, 1995.
- [2] Ibaraki, T. and Katoh, N., *Resource Allocation Problems: Algorithmic Approaches*, The MIT Press, London, 1988.
- [3] 今野浩, 山下浩, 非線形計画法, 日科技連 (ORライブラリー6), 1984.