

弱有効解集合上での凸関数最小化問題に対する内部近似法

02701684 大阪大学 *山田 修司 YAMADA Syuuji

01307844 大阪大学 谷野 哲三 TANINO Tetsuzo

01009544 大阪大学 乾口 雅弘 INUIGUCHI Masahiro

1 弱有効解集合上での凸関数最小化

本研究では次の多目的計画問題が与えられているものとする.

$$(P) \quad \text{maximize } \langle c^i, x \rangle, \quad i = 1, \dots, k, \quad \text{subject to } x \in X \subset R^n,$$

ただし, 制約集合 X はコンパクトな凸集合. ここで, $C = \{x \in R^n : \langle c^i, x \rangle \leq 0 \quad i = 1, \dots, l\}$ とすると, 問題 (P) の弱有効解集合 X_e は $X_e = X \setminus \text{int}(X + C)$ と表すことができる. ここで, 問題 (P) に対して次が成立するものとする.

(A1) $X = \{x \in R^n : p_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, t\}$ ただし, $p_j : R^n \rightarrow R \quad (j = 1, \dots, t)$ は微分可能な凸関数かつ $p_j(0) < 0$,

(A2) $\text{int } C \neq \emptyset$.

仮定 (A1) より, $p(x) := \max_{j=1, \dots, t} p_j(x)$ とすると $X = \{x \in R^n : p(x) \leq 0\}$ と表すことができる.

本研究では, 次の弱有効解集合上での凸関数最小化問題に対する逐次解法を提案する.

$$(OES) \quad \text{minimize } f(x) \quad \text{subject to } x \in X_e = X \setminus \text{int}(X + C)$$

ただし, 目的関数 $f : R^n \rightarrow R$ は次の仮定を満たす.

(A3) f は凸関数, $f(0) = \inf\{f(x) : x \in R^n \setminus \{0\}\}$, $\arg \min\{f(x) : x \in R^n\} = \{0\}$.

問題 (OES) は次の問題と等価である.

$$(MP) \quad \text{minimize } g(x) := f(x) + \delta(x|X) \quad \text{subject to } x \in R^n \setminus \text{int}(X + C)$$

ただし,

$$\delta(x|X) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in X \\ +\infty & \text{if } x \notin X. \end{cases}$$

問題 (MP) に対する双対問題は次のように表される.

$$(DP) \quad \text{maximize } g^H(x) \quad \text{subject to } x \in (X + C)^\circ$$

ただし, $(X + C)^\circ$ は $X + C$ の極集合, すなわち, $(X + C)^\circ = \{y \in R^n : \langle x, y \rangle \leq 1 \quad \forall x \in X + C\}$, 目的関数 g^H は関数 g の準共役関数, すなわち,

$$g^H(x) = \begin{cases} -\sup\{g(u) : u \in R^n\} & \text{if } x = 0 \\ -\inf\{g(u) : \langle x, u \rangle \geq 1\} & \text{if } x \neq 0. \end{cases}$$

関数 g^H は準凸関数なので問題 (DP) は凸集合上での準凸関数最大化問題である. 問題 (MP) の最適値を $\inf(MP)$, 問題 (DP) の最適値を $\sup(DP)$ と表すと, $\inf(MP) = -\sup(DP)$ となる.

2 弱有効解集合上での凸関数最小化問題に対する内部近似法

問題 (MP) に対して次の内部近似法のアルゴリズムを提案する.

Algorithm IAM-(MP)

許容誤差 $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ が与えられているものとする.

Initialization. $S_1 \subset X$ かつ $0 \in \text{int } S_1$ を満足する凸多面体 S_1 を生成する. $k \leftarrow 1$ として, Step 1 へ.

Step 1. 次の問題 (P_k) を考える.

$$(P_k) \quad \text{minimize } g(x) \quad \text{subject to } x \in R^n \setminus \text{int } (S_k + C).$$

問題 (P_k) に対する双対問題 (D_k) の最適解を v^k とする.

$$(D_k) \quad \text{maximize } g^H(x) \quad \text{subject to } x \in (S_k + C)^\circ.$$

問題 (D_k) は凸多面体上での準凸関数最大化問題なので, v^k を $(S_k + C)^\circ$ の頂点集合から選ぶことができる. さらに, v^k に対する次の凸計画問題を解くことにより, 問題 (P_k) の最適解が得られる.

$$\text{minimize } f(x) \quad \text{subject to } x \in X \cap \{x \in R^n : \langle v^k, x \rangle \geq 1\}. \quad (1)$$

ここで, 問題 (1) の最適解を $x(k)$ とする.

Step 2. 次の制約なし凸計画問題を解き, その最適解を z^k , 最適値を α_k とする.

$$\text{minimize } \phi(x; v^k) = \max\{p(x), -\langle v^k, x \rangle + 1\} \quad \text{subject to } x \in R^n. \quad (2)$$

a. $\alpha_k = 0$ ならばアルゴリズムを停止する. このとき, v^k は問題 (DP) の最適解, $x(k)$ は問題 (MP) の最適解となる.

b. $\alpha_k < 0$ ならば $S_{k+1} = \text{co } (S_k \cup \{z^k\})$, $k \leftarrow k + 1$ として, Step 1 へ.

Algorithm IAM-(MP) より生成される問題 (P_k) の列 $\{x(k)\}$ と問題 (D_k) の最適解の列 $\{v^k\}$ に対して次が成立する.

- $f(x(1)) \leq \dots \leq f(x(k)) \leq \dots \leq \inf(MP)$, $g^H(v^1) \geq \dots \geq g^H(v^k) \geq \dots \geq \sup(DP)$.
- $f(x(k)) = -g^H(v^k)$ for all k .

さらに, 点列 $\{x(k)\}$ の任意の集積点は弱有効集合 X_e に含まれ, 点列 $\{v^k\}$ の任意の集積点は問題 (DP) の制約集合 $(X + C)^\circ$ に含まれるので, 次が成立する.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x(k)) = \inf(MP), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g^H(v^k) = \sup(DP).$$

参考文献

- [1] Horst, R. and H. Tuy, *Global Optimization*, Springer-Verlag, Berlin (1990).
- [2] Konno, H., P.T. Thach and H. Tuy, *Optimization on Low Rank Nonconvex Structures* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1997).
- [3] Sawaragi, Y., H. Nakayama and T. Tanino, *Theory of Multiobjective Optimization*. Academic Press, Orlando, Florida (1985).