

正方向に劣モジュラ的な多面体の同時交換可能性

02301850 東京大学 高畑貴志 TAKABATAKE Takashi

1 はじめに

著者らは、非負ベクトルに拡張された劣モジュラ性を用いて、劣モジュラ集合関数を用いて定義される劣モジュラ多面体の、非 01-法線ベクトルが表す極大面も持てるような拡張を試みている [3]. 本研究では、拡張された多面体が、マトロイドの持つ 1 対 1 同時交換可能性に対応する性質を持つことを報告する。また、この交換可能性を利用して、これらの多面体上で線形関数を最大化するアルゴリズムを提案する。

2 劣モジュラ多面体の劣モジュラ性

有限集合 S 上の劣モジュラ集合関数 $f: 2^S \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ で、条件 $f(\emptyset) = 0, f(S) \in \mathbb{R}$ を満たすものに関連して、劣モジュラ多面体 $P(f) \subseteq \mathbb{R}^S$ が、 $P(f) := \{x \in \mathbb{R}^S \mid \sum_{i \in X} x(i) \leq f(X) \text{ for any } X \subseteq S\}$ により定められる。劣モジュラ多面体は、マトロイドの一般化であり、多くの興味深い結果が得られている [1].

一般に、凸集合 $C \subseteq \mathbb{R}^S$ は、 $\delta_C^*(p) := \sup\{p^T x \mid x \in C\}$ で定義される、 C の支持関数 $\delta_C^*: \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を用いて、ほぼ等価に扱うことができる。

劣モジュラ多面体 $P(f)$ の支持関数は、

$$f(p) + f(q) \geq f(p \vee q) + f(p \wedge q) \text{ for any } p, q \in \mathbb{R}_+^S \quad (1)$$

という、一般化された劣モジュラ性を満たすことが証明されている [2].

3 正方向に劣モジュラ的な多面体

この研究の対象となる「正方向に劣モジュラ的な多面体」なるものは、次のように定義する。

定義 1 多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^S$ が、正方向に劣モジュラ的であるとは、 P が次の (i), (ii) を満たすこととする。

- (i) P が下方単調である。(つまり、 $x \in P$ かつ $y \leq P$ なら $y \in P$.)
- (ii) P の支持関数が、劣モジュラ性 (1) を満たす。□

定義より、劣モジュラ多面体は、正方向に劣モジュラ的な多面体である。劣モジュラ多面体は、集合関数から定義されるため、01-法線ベクトルで表される極大面しか持たないが、正方向に劣モジュラ的な多面体は、非 01-法線ベクトルの極大面を持ってよい。

正方向に劣モジュラ的な多面体の例として、次のようなゲイン付きの 2 部ネットワーク流をあげることができる。

例 2 有向 2 部グラフ $D = (S', S; A)$ (ただし、 $A \subseteq \{(s, t) \mid s \in S', t \in S\}$) に、供給関数 $b: S' \rightarrow \mathbb{R}$ 、容量関数 $\bar{c}: A \rightarrow \mathbb{R}$ 、ゲイン関数 $\alpha: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ を付加したネットワークを考える。

フロー $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ のうち、ソースでの供給制限 $\sum_{v \in S} \varphi(v', v) \leq b(v')$ ($\forall v' \in S'$) と枝での容量制限 $\varphi(a) \leq \bar{c}(a)$ ($\forall a \in A$) を満たすものを実現可能とする。フロー φ の出力 $-\partial\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}_+$ を、 $-\partial\varphi(v) := \sum_{v' \in S'} \alpha(v', v)\varphi(v', v)$ と定義すると、実現可能なフローの出力全体は \mathbb{R}_+^S の多面体をつくる。この多面体 (P_+ とする) から作られる下方単調な多面体 $P := \{x \in \mathbb{R}^S \mid x \in P_+\}$ は正方向に劣モジュラ的な多面体となる。□

4 同時交換定理

本研究で証明された多面体の同時交換可能性は、次のように表現できる。ただし、 $u \in S$ の特徴ベ

クトルを, $\chi_u \in \{0,1\}^S$ で表す. また, ベクトル $x \in \mathbb{R}^S$ について, $\text{supp}(x), \text{supp}^+(x)$ はそれぞれ, $\{i \in S \mid x(i) \neq 0\}, \{i \in S \mid x(i) > 0\}$ を表す.

定理 3 正方向に劣モジュラ的な多面体 P の任意の 2 点 x, y で $\text{supp}^+(y-x) \neq \emptyset$ を満たすものに対し, $u \in \text{supp}^+(y-x), v \in \text{supp}(x-y), r \geq 0, \delta > 0$ が次の条件を満たすように取れる:

任意の $\epsilon < \delta$ なる $\epsilon \geq 0$ について, 2 点 $x + \epsilon(\chi_u - r\chi_v), y + \epsilon(r\chi_v - \chi_u)$ が P に属する. \square

この定理で示される性質は, マトロイドの基集合 $\beta \subseteq 2^S$ について知られている,

任意の $B_1, B_2 \in \beta$ で $B_1 \neq B_2$ なるものに対し, $B_1 + x - y, B_2 - x + y \in \beta$ となる $x \in B_2 \setminus B_1$ と $y \in B_1 \setminus B_2$ が存在する.

という, 1 対 1 同時交換可能性の一般化になっている.

非 01-法線ベクトルの極大面も許す劣モジュラ的な多面体を扱うため, 交換の量の比は 1 : 1 とは限らず 1 : r となる. しかし, 劣モジュラ性 (1) は,

一つの軸に沿った方向の変化に対し, せいぜいもう一つの軸に沿った方向の変化で多面体に戻って来られる.

という軸 (成分) に関する 1 対 1 交換可能性を表していると考えられる.

5 多面体上の最適化

定理 3 から, 正方向に劣モジュラ的な多面体 $P \subseteq \mathbb{R}^S$ に属し, 与えられた目的ベクトル $c \in \mathbb{R}_+^S$ との内積を最大にする点 $\bar{x} \in P$ を求める問題は, 次のようなアルゴリズムで解けることが保証される.

アルゴリズム 4

Step0 初期解を $x := (-\infty, \dots, -\infty) \in P$ とする.

Step1 S の元 u, v で ($u = v$ も可), 十分小さな $\epsilon > 0$ について, $r := \min\{r' \geq 0 \mid x + \epsilon(\chi_u - r'\chi_v) \in P\}$

として, $c(u) > rc(v)$ であれば, $u_* := u, v_* := v, r_* := r$ として, Step3 へ.

Step2 現在の点が最適解なので $\bar{x} := x$ で終了.

Step3 移動幅を $\delta := \max\{\epsilon > 0 \mid x + \epsilon(\chi_{u_*} - r_*\chi_{v_*}) \in P\}$ と設定して, 現在の点を $x := x + \delta(\chi_{u_*} - r_*\chi_{v_*})$ と更新して Step1 へ戻る. \square

このアルゴリズムは, 暫定解を更新するのに高々二つの軸方向の変化しか考慮しない, 局所的最適化法である. 01-法線ベクトルで表される極大面しか持たない劣モジュラ多面体では, Step2 の r は 0 か 1 にしかならない. 従って, c に基づいた S の元の順序を利用すれば, r の値を調べなくても進むべき方向を決めることができる. よって, マトロイドや劣モジュラ多面体に適用される greedy アルゴリズムは, この局所最適化法の特殊ケースとみなすこともできる.

多面体 P が, 有限個の非負ベクトルの集合 D 上で定義される正斉次関数 f を用いて $P := \{x \in \mathbb{R}^S \mid p^T x \leq f(p) \text{ for any } p \in D\}$ という形で与えられる場合, アルゴリズム 4 はもう少し具体的に記述できる. 例えば, Step1 の r は,

$$q := \bigwedge \{p/p_u \mid p \in D, p^T x = f(p), p_u \geq 0\}$$

で定められるベクトル q を用いて, $r = 1/q(v)$ と求められる.

参考文献

- [1] Fujishige, S.: Submodular Functions and Optimization. Annal of Discrete Mathematics 47 (1991)
- [2] Murota, K.: Discrete convex analysis. Mathematical Programming. 83 (1998) 313-371
- [3] Kashiwabara, K., Nakamura, M., Takabatake, T.: Integral polyhedra associated with certain submodular functions defined on 012-vectors. in Integer Programming and Combinatorial Optimization. LLNC 1610. Springer-Verlag (1999) 289-303