1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

非線形最適化問題に対する l_2 型主双対メリット関数を用いた主双対内点法

01702330 東京理科大学理学部 ＊矢部 博 YABE Hiroshi
01701240 数理システム 山下 浩 YAMASHITA Hiroshi

1. はじめに

本稿では，非線形最適化問題

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & f(x), & x \in \mathbf{R}^n, \\ \text{subject to} & g(x)=0, & x_i \geq 0,\ i \in I_P \subset \{1,2,...,n\} \end{array}$$

を解くための主双対内点法を考える．ただし，$f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$，$g:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$，$I_P$は添字集合で $n'=|I_P|$ とする．ここで，行ベクトルが $e_i^t, i \in I_P$ から成る $n' \times n$ 行列を Eとすれば，非負条件は $x' \equiv Ex \geq 0$ と書ける．Lagrange 関数を

$$L(w)=f(x)-y^t g(x)-z^t Ex$$

と定義したとき，Karush-Kuhn-Tucker(KKT) 条件は

$$r_0(w)=\begin{pmatrix} \nabla_x L(w) \\ g(x) \\ X'Ze \end{pmatrix}=0,\ \ x' \geq 0,\ z \geq 0,$$

で表される．ただし，$w=(x,y,z)^t$ とし，$y \in \mathbf{R}^m$ と $z \in \mathbf{R}^{n'}$ はそれぞれ等式制約条件と非負条件に関する Lagrange 乗数であり，また，$A(x)$ をその行ベクトルが $\nabla g_i(x)^t$からなる $m \times n$ 行列，$X'=\mathrm{diag}\,(x_1',\cdots,x_{n'}')$，$Z=\mathrm{diag}\,(z_1,\cdots,z_{n'})$，$e=(1,\cdots,1)^t \in \mathbf{R}^n$とする．

主双対内点法の多くは，バリヤパラメータ μ を導入して相補条件 $(XZe=0)$ を $XZe=\mu e$ に置き換えて得られるバリヤ KKT 条件にニュートン法を適用するものである．その際，直線探索法の枠組みで大域的収束性を実現するために，Yamashita(1992) が提案した l_1 型バリヤペナルティ関数が主変数 x に対するメリット関数としてよく使われている．本稿では，l_2 型バリヤペナルティ関数を用いることを提案し，さらに主双対空間 (wの空間) におけるメリット関数を構築して大域的収束性を示す．そのために，バリヤ KKT 条件を変形したシフト付バリヤ KKT 条件を導入する．また，この解法の超1次収束性についても論じる．なお，詳細については Yamashita and Yabe[1] を参照されたい．

以下では，添字 k はアルゴリズムの外部反復や内部反復の反復回数を表し，$\|\cdot\|$ は l_2 ベクトルノルムおよびそれから導かれる作用素ノルムを表す．また $S=\{x \in \mathbf{R}^n |\ x'>0\}, \mathbf{R}_+^{n'}=\{z \in \mathbf{R}^{n'} |\ z>0\}$ とおく．

2. シフト付バリヤ KKT 条件と主双対メリット関数

次の l_2 型バリヤペナルティ関数

$$F_0(x,\mu)=f(x)-\mu\sum_{i=1}^{n'}\log x_i'+\frac{1}{2\mu}\sum_{i=1}^{m}g_i(x)^2$$

の最小化問題を考える．この問題の1次の最適性条件は

$$\nabla f(x)-\mu E^t(X')^{-1}e+\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{m}g_i(x)\nabla g_i(x)=0,\ x'>0$$

である．ここで，$y=-g(x)/\mu$, $z=\mu(X')^{-1}e$ とおけば次の条件を得る．ただし $x'>0, z>0$ である．

$$r(w,\mu)\equiv\begin{pmatrix} \nabla f(x)-A(x)^t y-E^t z \\ g(x)+\mu y \\ X'Ze-\mu e \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この条件は Forsgren and Gill(1998) によって扱われており，本稿ではシフト付バリヤ KKT(SBKKT) 条件と呼ぶ．従来のバリヤ KKT 条件と本質的に異なる点は，等式条件をシフトして得られた条件 $g(x)+\mu y=0$ を含んでいることである．このことによって，等式制約条件の勾配ベクトルの1次独立性を仮定することなしに，与えられた $\mu>0$ に対してヤコビ行列 $\nabla r(w,\mu)$ が正則になることが保証される．したがって，このシフトは方程式の安定化を担う役割をしているともみなせる．次に直線探索法で用いるメリット関数について考える．我々は，次の l_2 型主双対メリット関数を提案する (ただし $\rho>0$，$\nu \in (0,2)$)．

$$F(w,\mu)=F_0(x,\mu) +\rho\log\frac{\{(x')^t z\}^{\nu}/n'+\|g(x)+\mu y\|^2+\|X'z-\mu e\|^2}{\left(\prod_{i=1}^{n'}x_i' z_i\right)^{\nu/n'}}$$

3. アルゴリズムと大域的収束性

SBKKT 条件を用いた主双対内点法のアルゴリズムは以下の通りである．

[アルゴリズム IP]

Step 0. (初期設定) パラメータ $\varepsilon>0$, $M_c>0$ および，正の数列 $\{\mu_k\}, \mu_k \downarrow 0$ を与える．$k=0$ とおく．

Step 1. もし $\|r_0(w_k)\| \le \varepsilon$ ならば停止する.

Step 2. 近似SBKKT条件 $\|r(w_{k+1}, \mu_k)\| \le M_c\mu_k$ を満たす点 w_{k+1} を求める.

Step 3. $k := k+1$ とおいて Step 1 へ行く. □

このアルゴリズムの Step 2 (近似SBKKT点の計算) の部分は, 次のアルゴリズムとして記述出来る.

[アルゴリズムLS]

Step 0. (初期設定) $w_0 \in S \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+^{n'}$, $\mu > 0$, $\rho > 0$, $\varepsilon' > 0$, $\gamma \in (0,1)$, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon_0 \in (0,1)$ を与える. $k = 0$ とおく.

Step 1. もし $\|r(w_k, \mu)\| \le \varepsilon'$ ならばアルゴリズムIPの外部反復に戻る.

Step 2. $J(w_k, G_k, \mu)\Delta w_k = -r(w_k, \mu)$ の解 Δw_k を探索方向に選ぶ. ただし

$$J(w_k, G_k, \mu) = \begin{pmatrix} G_k & -A(x_k)^t & -E^t \\ A(x_k) & \mu I & 0 \\ Z_k E & 0 & X_k' \end{pmatrix},$$

G_k はヘッセ行列 $\nabla_x^2 L(w_k)$ もしくはその近似行列である.

Step 3.

$$\begin{aligned} \alpha_{k\max} &= \min\left\{\min_i \left\{ -\frac{(x_k')_i}{(\Delta x_k')_i} \middle| (\Delta x_k')_i < 0 \right\}, \right. \\ &\qquad \left. \min_i \left\{ -\frac{(z_k)_i}{(\Delta z_k)_i} \middle| (\Delta z_k)_i < 0 \right\} \right\}, \\ \bar{\alpha}_k &= \min\{\gamma\alpha_{k\max}, 1\} \end{aligned}$$

とおいて, アルミホ基準 $(F(w_k + \bar{\alpha}_k\beta^{l_k}\Delta w_k, \mu) - F(w_k, \mu) \le \varepsilon_0\bar{\alpha}_k\beta^{l_k}\nabla F(w_k, \mu)^t\Delta w_k)$ を満足する最小の非負整数 l_k を求めて $\alpha_k = \bar{\alpha}_k\beta^{l_k}$ とおく.

Step 4. $w_{k+1} = w_k + \alpha_k\Delta w_k$, $k := k+1$ とおいて Step 1 へ行く. □

大域的収束性示すために次の条件を仮定する.

(G1) f と g は2回連続的微分可能である.

(G2) 初期点における $F(w,\mu)$ の準位集合 $\{w \in S \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+^{n'} | F(w,\mu) \le F(w_0,\mu)\}$ はコンパクトである.

(G3) 行列 G_k は一様に正定値かつ有界である. □

このとき, 固定された $\mu > 0$ に対するアルゴリズムLSの大域的収束性が示せるので, したがって, アルゴリズムIPの大域的収束性が証明出来る.

4. 超1次収束性

本節ではSBKKT条件に基づいた次の主双対内点法の超1次収束性について議論する. このアルゴリズムでは, パラメータ μ_k, γ_k の調整が必要になる.

[アルゴリズムIPlocal]

Step 0. (初期設定) $w_0 \in S \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+^{n'}$, $\mu_0 > 0$, $0 < \gamma_0 < 1$, $\varepsilon > 0$ を与える. $k = 0$ とおく.

Step 1. もし $\|r_0(w_k)\| \le \varepsilon$ ならば停止する.

Step 2. パラメータ $\mu_k > 0$, $0 < \gamma_k < 1$ を選ぶ.

Step 3. $J(w_k, G_k, \mu_k)\Delta w_k = -r(w_k, \mu_k)$ の解 Δw_k を探索方向に選ぶ.

Step 4. アルゴリズムLSと同様に $\alpha_{k\max}$ を計算して $\alpha_k = \min\{\gamma_k\alpha_{k\max}, 1\}$ とおく.

Step 5. $w_{k+1} = w_k + \alpha_k\Delta w_k$, $k := k+1$ とおいて Step 1 へ行く. □

このとき次の仮定をする.

(L1) 生成される点列 $\{w_k\}$ はもとの最適化問題のKKT点 $w^* = (x^*, y^*, z^*)^t$ に収束する.

(L2) f および g の2回偏導関数は x^* でLipschitz連続である.

(L3) w^* において正規条件, 2次の十分条件, 狭義相補条件が成り立つ.

(L4) $\mu_k = \xi_k\|r_0(w_k)\|^{1+\tau_1}$, $1 - \gamma_k = \kappa\xi_k\|r_0(w_k)\|^{\tau_2}$ によって μ_k と γ_k が更新される. ただし, τ_1, τ_2, κ, M' は $\min(1,\tau_2) > \tau_1$, $0 < \kappa < 1$, $\frac{1}{M'} \le \xi_k \le M'$ を満たす正の定数である.

(L5) 行列 G_k は, 各 k に対して $\|G_k - \nabla_x^2 L(w^*)\| < \delta$ ($\delta > 0$ は十分小), および, $\|(G_k - \nabla_x^2 L(w_k))\Delta x_k\| = O(\|\Delta w_k\|^{1+\tau_3})$ を満たす. ただし, τ_3 は $\tau_3 > \tau_1$ となる正定数である. □

以上の仮定のもとで次の定理が得られる.

[定理1] M_c を $0 < M_c < \sqrt{n'}$ を満たす定数とするとき, 以下のことが成り立つ.

(1) もし点 $\hat{w} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})^t \in S \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}_+^{n'}$ が $\|r(\hat{w}, \mu_k)\| \le M_c\mu_k$ を満たすならば,

$$\nu_1\|r_0(w_k)\|^{1+\tau_1} \le \|r_0(\hat{w})\| \le \nu_2\|r_0(w_k)\|^{1+\tau_1}$$

が成り立つ. ただし, ν_1 と ν_2 は正定数である.

(2) $\|r(w_k, \mu_{k-1})\| \le M_c\mu_{k-1}$ ならば, $\alpha_k = 1$ となる.

(3) $\|r(w_k + \Delta w_k, \mu_k)\| \le M_c\mu_k$ が成り立つ. □

この定理は, もし w_k が μ_{k-1} に対する近似SBKKT条件を満たすならば, (2) と (3) より $\alpha_k = 1$ が採用されて $w_k + \Delta w_k$ が μ_k に対する近似SBKKT条件を満足することを示している. したがって, (1) よりアルゴリズムIPLocalの超1次収束性が得られる.

参考文献

[1] H.Yamashita and H.Yabe, *An interior point method with a primal-dual l_2 barrier penalty function for nonlinear optimization* Technical Report, Mathematical Systems, Inc., Tokyo, Japan, March 1999.