

時系列データのカオスの解析法について - cos 解析法 -

01006143 名古屋工業大学 大鑄 史男* OHI Fumio

02202893 名古屋工業大学 鈴木 達也 SUZUKI Tatsuya

序.

ある対象の動きが連続的な dynamics に従っているとし、その対象に対して観測を行い時系列データを得るとする。もし、その対象に異常が生じれば、正常な場合の時系列データとは異なったものが得られるはずである。

本稿では、このような正常な場合の時系列データと異常の影響を受けた時系列データとを判別することを問題にし、一つの簡便な手法を提案する。

提案する手法の検証は、カオスの dynamic から人工的に作り出した時系列データに対して行う。また、実データへの適応に関しては講演の時点で紹介する。

1. 基本的な考え方.

dynamics と random の両極端の場合を考える。dynamics が相空間に描く曲線は、なめらかであり軌道上の近接した2点における接線方向はほとんど同じであり、一方、random であれば、軌道上のごく近くの点であっても接線方向は全く違っていると考えられる。

もし対象に異常が生じれば、軌道は擾乱し、軌道上のごく近い二点における方向は互いにズレ始めると考えられ、この方向の違い（または同一性）を見る事で、異常が生じているかどうかを判別できると考えられる。

しかし、相空間における dynamics 自体を直接知ることはできず、何らかの観測手段によって得られた時系列データのみが手元にある。問題は、この時系列データを用いて相空間における軌道方向に関する情報を取り出さなければならないことである。

2. Takens の Theorem.

Takens[3] の定理から、 n 次元相空間における dynamics を観測することで得られた時系列データを x_1, x_2, \dots, x_N とし、 $d \geq 2n$ に対して、

$$X_1 = (x_1, x_{1+\tau}, \dots, x_{1+(d-1)\tau}),$$

$$X_2 = (x_2, x_{2+\tau}, \dots, x_{2+(d-1)\tau}),$$

...

として d 次元ベクトル X_1, X_2, \dots を d 次元空間にプロットすれば、元の軌道を再構成することができる。 d は埋め込み次元、 τ は時間遅れと呼ぶ。従って、時系列データから再構成された軌道方向の変化を取り出すことができればよい。この方向の変化の取り出し方に

関しては、Kaplan and Glass[2], Wayland, Bromley, Pickett and Passamante[4], 五百旗頭[1]等のいくつかの提案があるが、アルゴリズム的に煩雑である。

3. 本稿で考える量.

Takens の定理から、 d 次元空間にプロットされた X_1, X_2, \dots は、元の軌道の再構成である。 X_j の前後の点 X_{j-1}, X_{j+1} をとり、ベクトル $X_j - X_{j-1}$ と $X_{j+1} - X_j$ とのなす角度の余弦を考える。

$$\begin{aligned} \cos(X_j - X_{j-1}, X_{j+1} - X_j) \\ = \frac{(X_j - X_{j-1}) \cdot (X_{j+1} - X_j)}{\|X_j - X_{j-1}\| \cdot \|X_{j+1} - X_j\|} \end{aligned}$$

もし、元の dynamics が異常の影響を受けずに、データが十分多くあれば、 $X_{j-1} - X_j$ と $X_{j+1} - X_j$ の向きが大きく異なることはなく、これらのなす角度の余弦は 1 に近いと期待できる。また異常の影響が大きくなれば、これらのなす角度の余弦は 1 から大きくずれていくはずである。

以上の考え方に従い、次のような量を考える。 X_1, X_2, \dots から k 個の点 $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}$ を選び、

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \frac{(X_{i_j} - X_{i_{j-1}}) \cdot (X_{i_{j+1}} - X_{i_j})}{\|X_{i_j} - X_{i_{j-1}}\| \cdot \|X_{i_{j+1}} - X_{i_j}\|}, \\ C &= \frac{\sum_{j=1}^k (X_{i_j} - X_{i_{j-1}}) \cdot (X_{i_{j+1}} - X_{i_j})}{\sum_{j=1}^k \|X_{i_j} - X_{i_{j-1}}\|^2} \end{aligned}$$

とする。一番目の量 C は、軌道の接線方向の変化を推定したものである。一方、二番目の量 C は、一番目の計算を簡便にしたものになっている。

4. 3 節の量 C についての検討.

図 1, 2 は、Rossler 力学系の x 座標のデータに正規乱数を乗せたものに対して、埋め込み次元を 2 から 120 まで変えた場合の C のグラフである。選んだ点の個数は、 $k = 100$ 、時間遅れは、6 とした。図 1 は、余弦を計算したもので、グラフは上から順に、 $N(0, 0.001^2)$, $N(0, 0.005^2)$, $N(0, 0.01^2)$, $N(0, 0.05^2)$, $N(0, 0.1^2)$, $N(0, 0.5^2)$, $N(0, 1)$ の正規乱数を乗せたものである。また、図 2 は、簡便法による計算で、グラフは上から順に、 $N(0, 0.01^2)$, $N(0, 0.05^2)$, $N(0, 0.1^2)$, $N(0, 0.5^2)$, $N(0, 1)$ の正規乱数を乗せたものである。図 1, 2 から、乱数の分散の大きさによって、 C の値が大きく変わることがわかる。

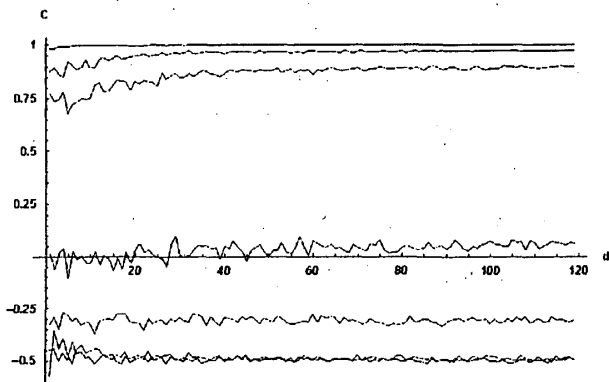


図 1: 余弦の計算.

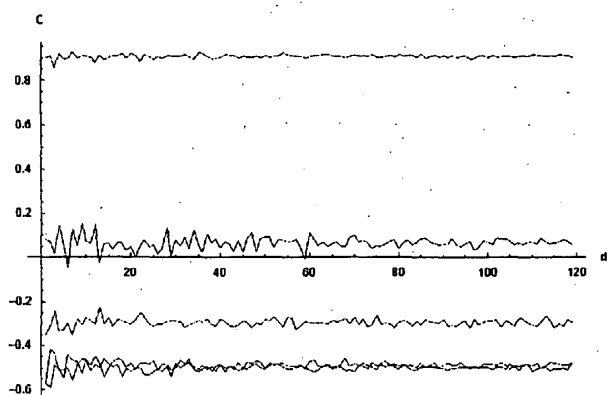


図 2: 簡便法による計算.

さらに次の図 3 は, Rossler 力学系の x 座標のデータに平均 0 分散 0.05^2 の正規乱数を確率 p で加えたものに対する一番目の C のグラフである. データの個数, 時間遅れは, 図 1, 2 の場合と同じである. グラフは, 下から $p=1, p=0.5, p=0.3, p=0.1$ の場合であり, p の値によって C の値が異なることがわかる.

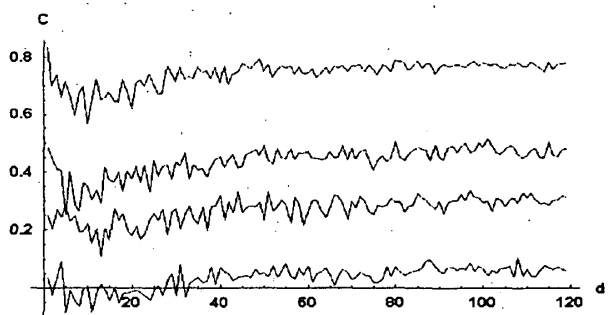


図 3: 正規乱数を確率的に乗せたときの余弦の計算.

5. 若干の理論的解析.

x_1, x_2, \dots を相関関数 $\rho(u)$ を持つ強定常過程とし,

$$C_k = \frac{\sum_{j=1}^k (X_{i_j} - X_{i_{j-1}}) \cdot (X_{i_{j+1}} - X_{i_j})}{\sum_{j=1}^k \|X_{i_j} - X_{i_{j-1}}\|^2}$$

とする. エルゴート定理から,

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (X_{i_j} - X_{i_{j-1}}) \cdot (X_{i_{j+1}} - X_{i_j}) \rightarrow \mathbf{E}[(X_2 - X_1) \cdot (X_3 - X_2)], \text{ a.s.}$$

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \|X_{i_j} - X_{i_{j-1}}\|^2 \rightarrow \mathbf{E}[\|X_2 - X_1\|^2] \text{ a.s.}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} C_k &= \frac{\mathbf{E}[(X_2 - X_1) \cdot (X_3 - X_2)]}{\mathbf{E}[\|X_2 - X_1\|^2]} \text{ a.s.} \\ &= \frac{-\rho(0) - \rho(2) + 2\rho(1)}{2(\rho(0) - \rho(1))} \text{ a.s.} \end{aligned}$$

となる. もし, x_1, x_2, \dots が独立ならば, C_k は, $-\frac{1}{2}$ に概収束することが分かる.

時系列データが全くランダムであれば, 埋め込み次元, 時間遅れに関係なく, 簡便化した C の値は, $-\frac{1}{2}$ に近い値になることがわかる. このことは, 簡便化した C を用いて, 時系列データを全くランダムなものとして良いかどうかの判定ができることを示している.

6. 最後に.

乱数を異常信号と想定し, Rossler 力学系に対して C の値を計算し, 異常信号が含まれるとき C の値が明確に変化することを見た. このように最初の C の値を用いる方法を cos 解析法 (CAM 法) と呼び, 二番目の C の値を用いる方法を簡便 cos 解析法 (SCAM 法) と呼ぶことにする.

実データに対し, 本稿で提案した方法を適応する際には, パラメーターの値の設定等解決しなければならない問題は多いが, 発表時にボールベアリングの信号データ, 日経平均株価データ等に対して提案した方法を試験的に適応した結果を紹介する.

参考文献.

- [1] 五百旗頭 (1997), 中部支部三学会講演会予稿集. [2] Kaplan and Glass (1993), Physica D, Vol.64, pp.431-454. [3] Takens (1980), Lecture Notes in Mathematics 898, Dynamical Systems and Turbulence, Warwick, eds. D. A. Rand and L. S. Young, Springer Verlag, pp.365. [4] Wayland, Bromley, Pickett and Passamante (1993), Physical Review Letters, Vol.70, No.5, pp580-582.