1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

# 2つのノードを訪問可能なサービス施設の最適配置問題

02004830 筑波大学 大山崇 OHYAMA Takashi
01602570 東京理科大学 宮沢政清 MIYAZAWA Masakiyo

## 1 はじめに

ピザの宅配や消防のようにサービスする施設からサーバーが移動して利用者にサービスを提供するシステムがある. この時, 利用者のいる各ノードでポアソン過程に従って, サーバーへの要求が発生する(要求の率は小さいとする. )と仮定して, サーバーが1人ずつFIFO(先着順)でサービスするモデルにおいて, 平均待ち時間を最小にするようにサービスする施設を配置する問題がある. [Berman et al.(1985), Brandeau(1992)] 本論文では, 客のサービスの要求率が小さいとしても2人以上待つ状態があるので, サーバーの定員を2人としたモデルで解析を行う.

## 2 解析

次のようなモデルについて考える. $n$個のノードを$\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$と表し, $\mathbf{a}_i$の重みを$h_i(\sum_{i=1}^n h_i = 1)$とする. $\mathbf{a}_i$ではパラメータ$\lambda h_i$のポアソン過程に従ってサーバーへの要求が発生する. サーバーは,

1. 施設から出発する時, 客が何人いるか(1人か2人以上か)を確認し, 最も古い客がいるノード($\mathbf{a}_{i_1}$とする. )と, 2番目に古い客がいるノード($\mathbf{a}_{i_2}$とする. )を記憶する.

2. $\mathbf{a}_{i_1}$に速度$v$で訪れる. そこで最も古い客のみにサービスする. もしそのノードに他に客がいても, その客等にはサービスしない.

3. 1の時点で客が1人ならば, 施設に速度$v$で戻る. 1の時点で客が2人以上ならば, $\mathbf{a}_{i_2}$に速度$v$で移動し, その客にサービスする. その後施設に速度$v$で戻る.

以下では, 施設とノードの位置は平面上とし, 2点間の距離$d$はユークリッド距離とするが, 道路ネットワーク上の場合でも解析することはできる.

施設が$\mathbf{x}$にあり, $i(i=1,2)$人サービスする時の平均サービス時間$\overline{S_i}(\mathbf{x})$と2次モーメント$\overline{S_i^2}(\mathbf{x})$は次の様になる.

$$
\begin{aligned}
\overline{S_1}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n h_i E\left[2\frac{d(\mathbf{x},\mathbf{a}_i)}{v}\right] \\
\overline{S_1^2}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n h_i E\left[\left(2\frac{d(\mathbf{x},\mathbf{a}_i)}{v}\right)^2\right] \\
\overline{S_2}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n h_i h_j E\left[\frac{d(\mathbf{x},\mathbf{a}_i)}{v}\right. \\
&\qquad \left.+\frac{d(\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j)}{v}+\frac{d(\mathbf{x},\mathbf{a}_j)}{v}\right] \\
\overline{S_2^2}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n h_i h_j E\left[\left(\frac{d(\mathbf{x},\mathbf{a}_i)}{v}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.+\frac{d(\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j)}{v}+\frac{d(\mathbf{x},\mathbf{a}_j)}{v}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

$L_m$を$m(m\geq 0)$回目の出動を終えて施設に戻った時の待ち人数, $N(t)$を$t(t>0)$の時間内に発生した客の数, $\xi_i(i=1,2)$を$m$回目の出動で$i$人サービスした時の出動時間とする. $L_{m+1}$は,

$$
L_{m+1} = \begin{cases} L_m - 2 + N(\xi_2) & L_m \geq 2 \\ N(\xi_1) & L_m = 0,1 \end{cases}
$$

となる. $\pi_k \stackrel{def}{=} P(L_m = k)(k\geq 0)$と定義し, 母関数$\psi(z) = \sum_{k=0}^\infty \pi_k z^k$と$\phi_i(z) = \sum_{k=0}^\infty P(N_i = k)z^k(i=1,2)$を使うと, サービス終了直後の平均待ち人数は,

$$
\begin{aligned}
z^2 &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n h_i h_j \\
&\quad \cdot e^{-\frac{\lambda}{v}\{d(\mathbf{x},\mathbf{a}_i)+d(\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j)+d(\mathbf{x},\mathbf{a}_j)\}(1-z)}
\end{aligned}
$$

の区間$(-1,0)$にある解$z$を$z_0$とし,

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= \Big\{(2-\lambda\overline{S_2}(\mathbf{x})) \\
&\quad \cdot\left(1-\sum_{i=1}^n h_i e^{-2\frac{\lambda}{v}(1-z_0)d(\mathbf{x},\mathbf{a}_i)}\right)\Big\} \\
&\quad /\Big\{\sum_{i=1}^n h_i e^{-2\frac{\lambda}{v}(1-z_0)d(\mathbf{x},\mathbf{a}_i)}+1 \\
&\quad -2z_0+\lambda(\overline{S_1}(\mathbf{x})-\overline{S_2}(\mathbf{x}))(1-z_0)\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\pi_0 = \frac{2-\lambda\overline{S_2}(\mathbf{x})-\pi_1(1+\lambda(\overline{S_1}(\mathbf{x})-\overline{S_2}(\mathbf{x})))}{2+\lambda(\overline{S_1}(\mathbf{x})-\overline{S_2}(\mathbf{x}))}
$$

を用いて，$\lambda\overline{S_2}(\mathbf{x})<2$の下で，

$$\begin{aligned}\overline{L_d}(\mathbf{x}) \;=\;& \{(\pi_0+\pi_1)\\ &\cdot\{2+4\lambda\overline{S_1}(\mathbf{x})+\lambda^2(\overline{S_1^2}(\mathbf{x})-\overline{S_2^2}(\mathbf{x}))\}\\ &-2\pi_1\lambda\overline{S_2}(\mathbf{x})-2+\lambda^2\overline{S_2^2}(\mathbf{x})\Big\}\\ &/\{2(2-\lambda\overline{S_2}(\mathbf{x}))\}\end{aligned}$$

となる．この関数は凸かどうかわからないが(計算の途中で，λが小さいとして，近似をすれば凸)，最急降下法を適用すると，極小値を得る点が見つかる．

## 3 数値実験と結果

表1: ノードの座標

| $x_1$ | $x_2$ | 重み$h_i$ |
|---|---|---|
| 30.1 | 30.1 | 0.0076 |
| 60.1 | 70.4 | 0.0587 |
| 360.1 | 370.4 | 0.1322 |
| 320.1 | 50.4 | 0.2196 |
| 310.7 | 110.4 | 0.1266 |
| 60.4 | 150.1 | 0.2021 |
| 110.1 | 320.4 | 0.0575 |
| 50.1 | 270.1 | 0.0790 |
| 150.1 | 300.1 | 0.0090 |
| 326.1 | 120.1 | 0.1070 |

表2: λによる最適点の位置の違い

| λ | 2人サービス | 1人サービス |
|---|---|---|
| 0.1 | (280.04,120.77) | (268.89,126.56) |
| 0.3 | (272.17,124.89) | (250.46,137.22) |
| 0.5 | (260.18,131.66) | (240.49,143.71) |

表1のようなノードで実験を行ったところ，Weber点が(281.18,120.20)であるのに対し，最適点が表2のようになった．図1は$\lambda=0.5$の時で，各黒丸の数字は$0.5h_i$である．図2はλを変化させて，Weber点と1人サービスの最適点，2人サービスの最適点の距離の差を表している．$D_{W2}$はWeber点と2人サービスの最適点の距離，$D_{W1}$はWeber点と1人サービスの最適点の距離，$D_{12}$は1人サービスの最適点と2人サービスの最適点の距離である．$\lambda=1.54$というのは反復の際，$\lambda\overline{S_2}(\mathbf{x})<2$を満たす上限である．この結果からλが小さければ，2人サービスの時は1人サービスの時より，Weber点に近いことがわかった．

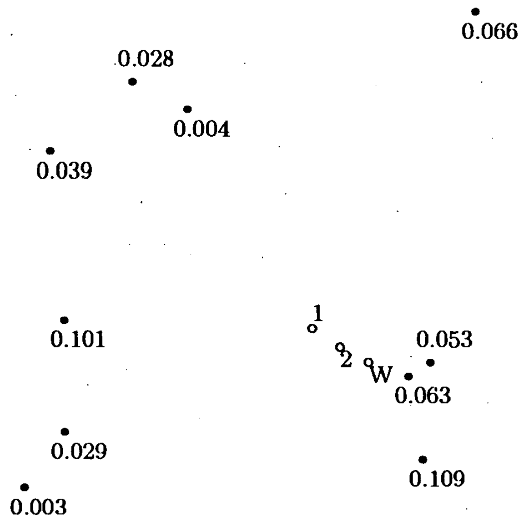


図1: $\lambda=0.5$での最適点の位置

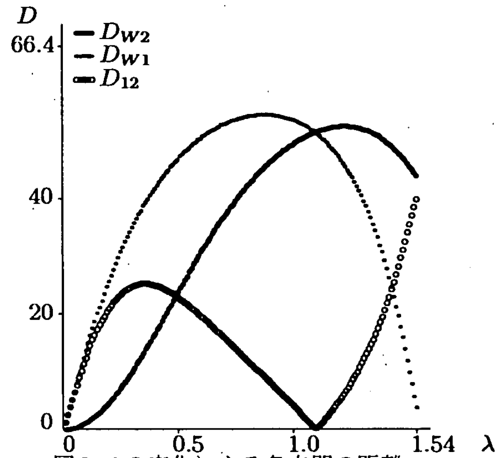


図2: λの変化による各点間の距離

## 4 今後の課題

救急のシステムにより近いモデルを作り解析したい．特に病院に寄る場合，救急車が複数ある場合，消防署を複数配置する場合を考えたい．

参考文献

Berman, O., Larson, R. C. and Chiu, S. S. 1985. Optimal Server Location on a Network Operating as an M/G/1 Queue. *Opns. Res.*, **33**, 746-770.

Brandeau, M. L. 1992. Characterization of the Stochastic Median Queue Trajectory in a Plane with Generalized Distances. *Opns. Res.*, 40, 331-341.