

投票ゲームにおける Deegan-Packle 指数の改良

入会予定	関西大学	*山本 康裕	Yasuhiro YAMAMOTO
	関西大学	林野 憲広	Kazuhiro HAYASINO
01401144	関西大学	中井 暉久	Teruhisa NAKAI

【序論】

投票は、国会・企業など多くの組織において、意思決定の方法として用いられている。このような投票による決定制度においては、投票主体（個人ないし集団）が票決に対して持つ影響力（パワー）の評価がしばしば大きな問題となる。そこで我々は、投票者の影響力を測定する指数として J.Deegan and E.W.Packle[1978] によって提案された Deegan-Packle 指数[1]を改良し、新たな指数を提案する。さらに、参議院における各政党の影響力の評価を述べる。

【投票ゲームとパワー指数】

投票者 $1, \dots, n$ の集合 N を考え、その部分集合 S のメンバーが協力して議案を可決できるとき、 S を勝利提携といい、勝利提携の集合を W とする。また集合 M は最小勝利提携の集合であり、次のように表すことができる。

$$M = \{ S \in W \mid \forall \text{ nonempty } T \subseteq S, S - T \notin W \} \quad \dots(1)$$

N の部分集合族上で定義された特性関数 v が

$$1. \quad v(\emptyset) = 0 \quad \dots(2)$$

$$2. \quad S \subseteq T \Rightarrow v(S) \leq v(T) \quad \dots(3)$$

$$3. \quad S \cap T = \emptyset \Rightarrow v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \quad \dots(4)$$

を満たすとき (n, v) を n 人協力ゲームという。さらに、

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{if } S \in W \\ 0 & \text{if } S \in L \end{cases}$$

を満たすとき (n, v) を投票ゲーム（あるいは単純ゲーム）という。また、投票ゲームのうち各投票者がそれぞれ何票かの票を持ちその多数決によって決定が行われるものを、重みつき多数決ゲームといい、必要票数を q 、投票者 i の重みを w_i とするとき、次のように表わされる。

$$[q; w_1, w_2, \dots, w_n]$$

パワー指数は投票ゲームにおいて、各投票者の勝敗への影響力を示すものである。主なパワー指数における影響力の考え方には以下のようなものがある。

• Shapley-Shubik 指数[2] (以下 S-S 指数)

提出された議案に対し、それに賛成する投票者が提携を形成するときに、ある投票者が加わることでよりそれまで投票に勝てなかった提携が勝てるようになるとき、その投票者は影響力を持つ。

• Banzhaf 指数[3] (以下 B 指数)

投票者が投票態度を賛成から反対ないしはその逆に変えることにより、可決から否決ないしはその逆に行えるとき、その投票者は影響力を持つ。

• Deegan-Packle 指数 (以下 D-P 指数)

投票者 i の D-P 指数は以下のように定義される。

$$\rho_i(v) = \frac{1}{|M(v)|} \sum_{S \in M_i(v)} \frac{1}{|S|} \quad \dots(6)$$

$|S|$: 集合 S の要素数

$M(v)$: 最小勝利提携の集合

$M_i(v)$: 投票者 i を含んだ最小勝利提携の集合

D-P 指数の 3 つの前提条件を以下に示す。

1. 最小勝利提携だけが指数に影響する。
2. 最小勝利提携内の各投票者は共同利得 1 を等分に分配する。
3. 各最小勝利提携は、同じ確率で形成される。

【改良した指数の数式化】

D-P 指数の前提条件 3 は提携内の投票者数の多少に関わらず同じ確率で組み合わせられるわけであるが、現実的には、提携内の投票者数が多いほど、意見の調整や各人の思惑などが絡んで提携を組むのは困難になると考えられる。よって、提携の形成はそれを構成する投票者数が多いほどまともにくくなると思われることから、我々は前提条件 3 が現実的ではないと考えて、

3'. おのおのの最小勝利提携は、投票者数が少ないほど組み合わせられる確率は高くなる。
 に変更し、投票者 i の改良した指数を次のように定義する。

$$\mu_i(v) = \sum_{S \in M_i(v)} \frac{\left(\frac{1}{|S|}\right)^\alpha}{\sum_{J \in M(v)} \left(\frac{1}{|J|}\right)^\alpha} \cdot \frac{1}{|S|} \quad \dots(7)$$

α : 形成確率のメンバー数への依存度 (≥ 0)

改良した指数では定数 α の値が大きくなるほどメンバー数が多い最小勝利提携を形成する確率が低くなる。そして $\alpha = 0$ の場合、D-P 指数と一致し、改良した指数は D-P 指数を含んだものといえる。このように我々は前述の D-P 指数の前提条件をより現実的に改良することによって新しいパワー指数を提案した。

ここでパワー指数の背景となっている公理系を示す。

A1. ダミー投票者の指数は0である。

$$\pi_i(v) = 0 \Leftrightarrow M_i(v) = \phi \quad \dots(8)$$

A2. 指数は投票者の名前の付け替えには無関係である。

N の任意の順列 σ に対し、次式が成り立つ。

$$\pi_{\sigma(i)}(\sigma v) = \pi_i(v) \quad \dots(9)$$

A3. 正規性

$$\sum_{i \in N} \pi_i(v) = 1 \quad \dots(10)$$

A4. 合成ゲームの指数は成分ゲームの指数の1次結合である。

$v, w \in C'$ が合成可能とすると、次式が成り立つ。

$$\pi(v \vee w) = \frac{1}{\sum_{i \in M(v,w)} \left(\frac{1}{|J|}\right)^\alpha} \times \left[\left\{ \sum_{i \in M(v)} \left(\frac{1}{|J|}\right)^\alpha \right\} \pi_i(v) + \left\{ \sum_{i \in M(w)} \left(\frac{1}{|J|}\right)^\alpha \right\} \pi_i(w) \right] \quad \dots(11)$$

π : パワー指数

C' : 投票ゲームの集合

このとき、次の定理が証明できる。

定理：改良した指数は公理 A1~A4 満たす。

またこの4つの公理を満たす指数は改良した指数のみである。

【改良した指数による評価】

改良した指数を既存のパワー指数と比較するために S-S 指数、B 指数、D-P 指数を用いて参議院 (1999 年 5 月 14 日現在 [参議院ホームページより]) の各政党の影響力を評価していく。各政党の議席数が政党 (投票者) の重みと考えることができるので、重みつき多数決ゲーム

[127; 104, 55, 24, 23, 14, 12, 11, 4, 1, 1, 1, 1, 1]

であり各政党の指数は Table.1 のようになる。

S-S 指数、B 指数は全体的によく似た数値をしており、ともに第 1 党である自民党を高く評価し、他の政党の評価はおおむね低い。これは、ある政党が意思決定 (賛成あるいは反対) をして可決あるいは否決することができるかどうかを基準としているので、議席数の大きな政党が高い評価になるのは当然であり、特に第 1 党の議席数が過半数近くある場合その傾向が強い。

D-P 指数は、社民党、二院クラブ、無所属以外は全体的にほぼ同じ値である。これは D-P 指数特有のもので、ある投票者を含む最小勝利提携数の大小によるものであり、最小勝利提携に入りやすい (この場合の入りやすいとは議席数が多いとは一概にいえない) 議席数を持った政党に対し、高く評価する傾向がある。よって、自由党、参議院の会を著しく高

く評価している。第 1 党である自民党の評価が著しく低いことや議席数の差に対してあまりにも指数の差がないことからわかるように現実的な評価とは言い難い。

改良した指数 (現実への適用を考えて $\alpha=4$ とした) は、自民党の評価は S-S 指数、B 指数に比べると低いが他の政党については同程度である。また、改良した指数と S-S 指数、B 指数が異なるのは、議席数の大小と影響力の大小が逆転している (社民党と自由党、参議院の会) 点である。これは、S-S 指数や B 指数は議席数の大小と影響力の大小とは逆転しないが、D-P 指数では自由党、参議院の会を著しく高く評価しており、改良した指数にもその特徴が残っている事を示している。

ところで、政界では自自連立政権が誕生してしばらく経つ、これは自民単独では政権維持が難しいと考えることができるならば、S-S 指数、B 指数における自民党の評価は、高すぎるともいえる。

以上のことから、D-P 指数から改良した指数は、D-P 指数の特徴を継承しながらも、D-P 指数のように著しく現実性を失うこともなく S-S 指数、B 指数ほど第 1 党を過大評価もしないということがわかる。改良した指数は D-P 指数を完全に含むことは、前述の通りであるが、S-S 指数、B 指数と比較してもより現実にあった指数であるといえるであろう。

Table.1 各政党の影響力

政党	議席数	New指数	D-P指数	S-S指数	B指数
自民党	104	0.4556	0.1313	0.5720	0.6088
民主党	55	0.1400	0.1248	0.1040	0.0856
公明党	24	0.1400	0.1248	0.1040	0.0856
共産党	23	0.1400	0.1248	0.1040	0.0856
社民党	14	0.0382	0.0596	0.0387	0.0446
自由党	12	0.0398	0.1231	0.0373	0.0442
参議院の会	11	0.0398	0.1231	0.0373	0.0442
二院クラブ	4	0.0007	0.0146	0.0006	0.0012
無所属	1×5	0.0013	0.0348	0.0004	0.0008

* B 指数は合計が 1 となるように補正してある。また、改良した指数 (New 指数) は $\alpha=4$ のケースである。

参考文献

- [1] J. Deegan and E. W. Packel, A New Index of Power for Simple n-Person Games, *International Journal of Game Theory*, 7(1978), pages 113-117
- [2] L. S. Shapley and M. Shubik, A method for evaluating the distribution of power in a committee system, *American Political Science Review*, 48 (1954), pages 787-792
- [3] J. F. Banzhaf III, Weighted voting doesn't work: a mathematical analysis, *Rutgers Law Review*, 19 (1965), pages 317-343