

クレジット・デフォルト・スワップの評価モデル

青沼 君明* 中川 秀敏**

*東京三菱銀行商品開発部, 東京大学大学院数理科学研究科

**東京大学大学院数理科学研究科

クレジット・デリバティブ・スワップの評価では、企業のデフォルトをハザード・プロセスとしていかに取り込むかという問題がある。本稿では、Vasicek タイプのハザード・プロセスを用いることで、デフォルト率に平均回帰性を持たせたクレジット・デフォルト・スワップの評価モデルと、それらのパラメータ推定法について示す。

1. はじめに

クレジット・デリバティブを評価するモデルの一つに、ハザード・プロセスを Gaussian プロセスとした Davis and Marvoidis モデル[2]がある。このモデルでは、 $w(t)$ を標準ブラウン運動、 $\mu(t)$ を時間変化するドリフト、 σ を標準偏差とし、ハザード・プロセスを

$$dh(t) = \mu(t)dt + \sigma dw_t, \quad h(0) = h_0 \quad (1)$$

として表現した。しかし、このモデルでは記述が簡単になるという反面、

- ①時間の経過と共に、想定されるハザード率が初期の値と大きく乖離してしまう可能性がある
- ②デフォルト確率が負となる(=生存確率が1を超える)場合がある

などという問題があった。そこで、①の問題を解決するために、デフォルト率に平均回帰性を持たせた Vasicek タイプのデフォルト・プロセスによるクレジット・デフォルト・スワップの評価モデルを構築する。ハザード・プロセスを用いる狙いはバスケット・クレジット・デフォルト・スワップの評価を可能とし、任意の契約期間のスワップを評価できることにある。

本稿では、まず第2章でクレジット・デフォルト・スワップの定義を述べ、第3章でこのデフォルトのモデル化を行なう。そして、第4章でクレジット・デフォルト・スワップの評価方法を示し、第5章で全体的な取り纏めを行なう。なお、本稿では、Kusuoka[4]が参考となった。

2. クレジット・デフォルト・スワップの定義

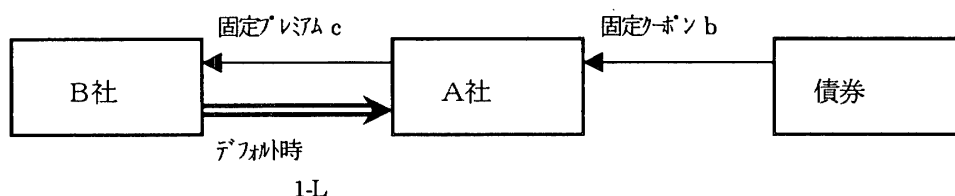


図1 クレジット・デフォルト・スワップ

クレジット・デフォルト・スワップのごく単純な例としては、ある企業の債券を保有するA社が、その債券のデフォルト・リスクをヘッジしたいと考えた時に利用するスワップ契約があげられる。A社はB社に対し、デフォルトが発生するまで、もしくはスワップの契約期間が終了するまで、保険料に相当する固定のプレミアム c を定期的に支払い、一方のB社は、デフォルトがスワップ期間終了前に生じた場合には、参照資産となっ

た債券の回収不能分 $(1 - L)$ に相当する額を、次のクーポン支払日時点で A 企業に支払うという契約である。この取引の A 社の立場を Fixed サイドと呼び、B 社の立場を Recovery サイドと呼ぶ。

3. デフォルトのモデル化

ランダムな時間 τ において、デフォルトはハザード率 $h(t)$ で発生すると仮定する。つまり、時点 t でデフォルトしていない(存続している)企業が、次の微小な時間区間 $[t, t + dt]$ の間にデフォルトする確率は $h(t)dt$ に等しく、 $h(t)$ は、ランダムなプロセスであるとする。

$$N_t = 1_{(t \leq \tau)}$$

と定義すると、 N_t はデフォルト時間 τ で 0 から 1 にジャンプするカウンティング・プロセスであり、デフォルトが時点 t 以前に起きていれば 1、起きていなければ 0 の値を持つ。

$h(t)$ の正確な定義は

$$M_t = N_t - \int_0^t h(s)(1 - N_s) ds \quad (2)$$

で与えられるプロセス M_t がマルチンゲールであるということである。

ここで、ハザード・レートに平均回帰性を持たせるために、Vasicek タイプのハザード・プロセスを適用する。

$$dh(t) = c(m - h(t))dt + \sigma dw_t, \quad h(0) = h_0 \quad (3)$$

なお、 c は平均への回帰スピード、 m は平均的なハザード・レート、 w_t は標準ブラウン運動、 σ は標準偏差である。特に $c = \sigma = 0$ の場合は、 $h(t) = h_0$ となり、 $P[\tau > t] = e^{-h_0 t}$ となる。

一般の場合のデフォルト時間 τ の分布は

$$\begin{aligned} P_{h_0}[\tau > t] &= E_{h_0} \left[\exp \left(- \int_0^t h(s) ds \right) \right] \\ &= \exp \left[\frac{1}{c} (e^{-ct} - 1) \left(h_0 - m - \frac{\sigma^2}{4c^2} (e^{-ct} - 3) \right) - t \left(m - \frac{\sigma^2}{2c^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

で与えられる。

次に、Duffie and Singleton[3]のモデルに習い、デフォルト直後の債券価値は、デフォルト直前の債券価格にリカバリー・レート L を掛け合わせたものになると仮定する。 $R(t)$ を調整後の短期金利、 $r(t)$ を無リスク金利、 L をリカバリー・レート、 $h(t)$ をハザード・レートとすると、時点 T で支払 1 がなされるとした場合の債券の時点 0 での価値 V_0 は、

$$V_0 = E \left[e^{-\int_0^T R(s) ds} 1 \right] \quad (5)$$

$$R(t) = r(t) + (1 - L)h(t) \quad (6)$$

で与えられる。このモデルの利点は、クレジット・スプレッドとデフォルトの直接的な関係が与えられるという点であり、もし $h(t) = h$ (固定) なら、クレジット・スプレッドは $(1 - L)h$ となる。しかし、クレジット・スプレッドからは、 L と h を分離して推定することができず、 $(1 - L)h$ という形の推定しかできない(一般的には回収率を固定してパラメータを推定する)。

(6)式にみるように、このモデルでは 2 つのプロセス、すなわちデフォルトを表わすハザード率 $h(t)$ と、無リスク短期金利 $r(t)$ に関する 2 つのプロセスがある。ここでのアプローチでキーとなる仮定は、 $h(t)$ と $r(t)$ が独立であるという仮定、すなわち、デフォルト機会は、イールドカーブの影響を受けないという仮定である。

即ち、デフォルトは例えば金利の水準などではなく、企業固有の要因によって生じていることを意味している。

$Z(s, t)$ を満期が時点 t の無リスク割引債の時点 s での価格とすると、 $h(t)$ と $r(t)$ は独立であるので、(5) 式のファクターは別々に計算でき、

$$V_0 = Z(0, T) E \left[e^{-\int_0^T (1-L)h(s)ds} 1 \right] \quad (7)$$

$$Z(s, t) = E \left[\exp \left(-\int_s^t r(u)du \right) \middle| \mathcal{F}_s \right]$$

で表現される。金利はディスカウント・ファクターとしてのみ利用していることから、このモデルでは、どのような金利モデルが使われているかには依存しない。

(3)式のハザード・モデルのパラメータは、クレジット・スプレッドのマーケット・データから推定することができる。しかし、市場で実際に売買されている個別企業の社債の種類が、(3)式の c, m, σ というパラメータを決定するだけ売買がされていないケースが多く、何らかの方法でパラメータを外生的に与える必要がある。ここでは、最も極端な例として、クレジット・デフォルト・スワップの対象となる債券の発行企業が、それ以外の債券を発行していない、もしくはそれ以外の債券が市場で流通していない場合の評価法について検討する。

満期 T の社債の時点 t における市場価格を $P(t, T)$ とし、その値と無リスク金利とのスプレッド $y(t, T)$ を

$$P(t, T) = E \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] e^{-y(t, T)(T-t)}$$

で定義する。

このとき以下で見るように、

① $y(t, T)$ が T についてなめらか

② $y(t, T)(T-t)$ が T の増加(これはフォワード・クレジット・スプレッドが正であることを意味する)

となる。(7)式と(3)式より、時点 t での満期 T の債券のクレジット・スプレッド $y(t, T)$ は次のように与えられる。

$$e^{-y(t, T)(T-t)} = \exp \left[\frac{1}{c} (e^{-c(T-t)} - 1) \left((1-L)(h(t) - m) - \frac{\sigma^2}{4c^2} (1-L)^2 (e^{-c(T-t)} - 3) \right) - (T-t) \left((1-L)m - \frac{\sigma^2}{2c^2} (1-L)^2 \right) \right] \quad (8)$$

$$h(t) = \frac{1}{1-L} \left[\frac{-y(t, T)(T-t) + (T-t) \left((1-L)m - \frac{\sigma^2}{2c^2} (1-L)^2 \right)}{\frac{1}{c} (e^{-c(T-t)} - 1)} + \frac{\sigma^2}{4c^2} (1-L)^2 (e^{-c(T-t)} - 3) \right] + m \quad (9)$$

(4)式と(9)式より、累積生存確率は

$$P_{h_0}[\tau > t] = \exp \left[-\frac{y(t) t}{1-L} + L \sigma^2 \left(\frac{1}{4c^2} (e^{-ct} - 1) (e^{-ct} - 3) + \frac{t}{2c^2} \right) \right] \quad (10)$$

であり、デフォルト時間の分布関数を

$$F(t) = P_{h_0}[\tau \leq t]$$

と定義すると

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\frac{y(t)t}{1-L} + L\sigma^2\left(\frac{1}{4c^2}(e^{-ct}-1)(e^{-ct}-3) + \frac{t}{2c^2}\right)\right] \quad (11)$$

となる。\$y(t)\$ は市場のクレジット・スプレッドであるので、(11)式は市場でのインプライド・デフォルト確率となる。

4. デフォルト・スワップの評価

スワップの価値は、Fixed サイドと Recovery サイドの差となる。

4.1 Fixed サイド

filtration 付きの確率空間を \$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)\$ で表わす。ここで \$P\$ は risk-neutral probability measure であり、\$\{\mathcal{F}_t\}\$ は usual hypothesis を満たす filtration である。

\$r\$ を無リスクのスポット・レート・プロセスとし、満期が \$t\$ である無リスク割引債の \$s\$ 時点での価格 \$Z(s, t)\$ を

$$Z(s, t) = E\left[\exp\left(-\int_s^t r_u du\right) \middle| \mathcal{F}_s\right] \quad (12)$$

で表わす。満期が \$T\$ であり、\$n\$ 回の利払日 \$t_i\$ (\$0 < t_1 < \dots < t_n < T\$) 毎にデフォルトの保険料に相当する固定プレミアム \$c_i\$ (\$i = 1, 2, \dots, n\$) が支払われるデフォルト・スワップが契約されているとする。デフォルト・スワップでは、デフォルトが発生した時点 \$\tau\$ で契約が終了するので、Fixed サイドのデフォルト・スワップの現在価値 \$P_F\$ は、\$t_i < \tau\$ 時点までのクーポンを割引いたものになる。

$$P_F = E\left[\sum_{i=1}^n c_i \exp\left(-\int_0^{t_i} r_u du\right) 1_{\{t_i < \tau\}}\right] \quad (13)$$

ここで、スポットレート・プロセス \$r(t)\$ とハザード・プロセスは独立であると仮定すると、

$$P_F = \sum_{i=1}^n Z(0, t_i) c_i (1 - F(t_i)) \quad (14)$$

が得られる。

4.2 Recovery サイド

もし、債券発行企業がデフォルトした場合、B社はその債券の回収不能分だけA社に対して支払義務が生ずる。\$B(t)\$ を、このデフォルト・スワップの対象となった原債券の \$t\$ 時点での価値であるとし、この債券の発行企業がデフォルトした場合には、デフォルトが起こる直前の債券価格 \$B(\tau-)\$ に、回収率 \$L\$ (\$0 < L \leq 1\$) を掛け合わせた \$LB(\tau-)\$ がA社が回収可能な額であるとする。

この債券のクーポン支払い日を \$u_j\$ (\$0 < u_1 < u_2 < \dots < \tau\$) とし、\$j\$ 番目のクーポン支払い日 \$u_j\$ では \$b_j\$ のクーポンが受取れるとする。また、デフォルトの発生が \$u_{j-1}\$ 時点から \$u_j\$ 時点の間に発生した場合には、B社はA社の回収不能分に相当する \$1 - LB(\tau-)\$ の保証を \$u_j\$ 時点で行なわなければならないと仮定する。

この場合、デフォルト・スワップの対象となった原債券の時点 \$t\$ での価値 \$B(t)\$ は、

$$B(t) = E \left[\sum_{u_i \geq t} b_i \exp \left(- \int_t^{u_i} \{ r_s + (1-L)h(s) \} ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (15)$$

となる。また、Recovery サイドのデフォルト・スワップの現在価値 P_R は、

$$\begin{aligned} P_R &= E \left[\exp \left(- \int_0^T r_s ds \right) (1 - LB(\tau)) 1_{\{\tau \leq T\}} \right] \\ &= \int_0^T E \left[e^{-\int_0^t h(s) ds} h(t) \right] Z(0, t) dt \\ &\quad - L \sum_{i=1}^n b_i Z(0, u_i) \int_0^{T \wedge u_i} E \left[e^{-\int_0^t h(s) ds} h(t) \cdot E \left[e^{-\int_t^{u_i} h(s) ds (1-L)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \right] dt \end{aligned} \quad (16)$$

で計算できる。

(4)式より、

$$\begin{aligned} E \left[e^{-\int_0^t h(s) ds} h(t) \right] &= \left[e^{-ct} h_0 - m(e^{-ct} - 1) - \frac{\sigma^2}{2c^2} (e^{-ct} - 1)^2 \right] \\ &\quad \times \exp \left[\frac{1}{c} (e^{-ct} - 1) \left(h_0 - m - \frac{\sigma^2}{4c^2} (e^{-ct} - 3) \right) - t \left(m - \frac{\sigma^2}{2c^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

である。したがって(8)式より

$$\begin{aligned} &E \left[e^{-\int_0^t h(s) ds} h(t) \cdot E \left[e^{-\int_t^{u_i} h(s) ds (1-L)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \right] \\ &= \exp \left(- \frac{1}{c} (1 - D_i(t)) \left[-m + \frac{\sigma^2}{4c^2} + \frac{\sigma^2}{4c^2} D_i(t) \right] + (u_i - t)(1-L) \left\{ m - \frac{\sigma^2}{2c^2} (1-L) \right\} \right) \\ &\quad \times \left[(1 - e^{-ct}) \left\{ m - \frac{\sigma^2}{c^2} + \frac{\sigma^2}{2c^2} D_i(t)(1 + e^{-ct}) \right\} + e^{-ct} h_0 \right] \\ &\quad \times \exp \left(- \left(m - \frac{\sigma^2}{2c^2} \right) t - \frac{1}{c} D_i(t) \left(\frac{\sigma^2}{c^2} - m \right) (1 - e^{-ct}) + \frac{\sigma^2}{4c^3} D_i(t)^2 (1 - e^{-2ct}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{c} (1 - D_i(t) e^{-ct}) h_0 \right) \end{aligned} \quad (18)$$

が得られる。ただし、

$$D_i(t) = L + (1-L)e^{-c(u_i-t)}$$

である。

また、参照資産である債券が q 種類あるバスケットの場合の Recovery サイドのデフォルト・スワップの現在価値 P_R は、以下の式で算出される。

$$\begin{aligned} P_R &= \sum_{k=1}^q \int_0^T E \left[\exp \left(- \int_0^t \sum_{l=1}^q h^{(l)}(s) ds \right) h^{(k)}(t) \right] Z(0, t) dt \\ &\quad - \sum_{k=1}^q L^{(k)} \sum_{i=1}^n b_i^{(k)} Z(0, u_i^{(k)}) \int_0^{T \wedge u_i^{(k)}} E \left[\exp \left(- \int_0^t \sum_{l=1}^q h^{(l)}(s) ds \right) h^{(k)}(t) \right] \end{aligned}$$

$$\times E \left[\exp \left(- \int_t^{u_j^{(k)}} (1 - L^{(k)}) h^{(k)}(s) ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] dt$$

さらに、クレジット・デフォルト・スワップの契約は、A社、B社のどちらかが契約満期以前にデフォルトした場合にはその時点で契約は解消され、それ以降のキャッシュフローは発生しないと仮定したごく単純なケースでは、Counter Party リスクを含んだクレジット・デフォルト・スワップの評価は以下ようになる。

A社のデフォルト時間を $\tau^{(A)}$ 、B社のデフォルト時間を $\tau^{(B)}$ とおく。A社、B社のどちらかがデフォルトした場合には契約は解消されるので、固定プレミアム c_i ($i = 1, 2, \dots, n$)の受渡しは、A社とB社とreferenceの何れかがデフォルトする直前の利払日 t_{i-1} ($t_{i-1} \leq \tilde{\tau} < t_i$)までなされることになる。この場合のFixedサイドのクレジット・デフォルト・スワップの現在価値 P_F は、

$$\begin{aligned} P_F &= E \left[\sum_{i=1}^n c_i \exp \left(- \int_0^{t_i} r_u du \right) 1_{\{t_i < \tilde{\tau}, t_i < \tau^{(A)}, t_i < \tau^{(B)}\}} \middle| \mathcal{F}_0 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n Z(0, t_i) c_i E \left[\exp \left\{ - \int_0^{t_i} \left(\sum_{k=1}^q h^{(k)}(t) + h^{(A)}(t) + h^{(B)}(t) \right) du \right\} \right] \end{aligned}$$

となる。

Referenceのデフォルトが、 $u_{i-1} \leq \tilde{\tau} < u_i$ で発生したとすると、 u_i 時点までにB社がデフォルトした場合には、回収不能分の保証はなされないことになる。また、A社がデフォルトした場合には、B社には債務が残るので回収不能分の支払いも行なわれる。

$$\begin{aligned} &E \left[1_{\{\tilde{\tau} \leq T, \tau^{(A)} > \tilde{\tau}, \tau^{(B)} > u(\tilde{\tau})\}} \right] \\ &= E \left[\int_0^T \sum_{k=1}^q h^{(k)} \cdot \exp \left(- \int_0^t \left(\sum_{k=1}^q h^{(k)}(s) + h^{(A)}(s) \right) ds - \int_0^{u_i} h^{(B)}(s) ds \right) dt \right] \end{aligned}$$

であるから、Recoveryサイドのクレジット・デフォルト・スワップの現在価値 P_R は

$$\begin{aligned} P_R &= \sum_{k=1}^q \int_0^T E \left[\exp \left(- \int_0^t \left(\sum_{l=1}^q h^{(l)}(s) + h^{(A)}(s) \right) ds - \int_0^{u_j} h^{(B)}(s) ds \right) h^{(k)}(t) \right] Z(0, t) dt \\ &\quad - \sum_{k=1}^q L^{(k)} \sum_{i=1}^n b_i^{(k)} Z(0, u_i^{(k)}) \int_0^{T \wedge u_j^{(k)}} E \left[\exp \left\{ - \int_0^t \left(\sum_{l=1}^q h^{(l)}(s) + h^{(A)}(s) \right) ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^{u_j} h^{(B)}(s) ds \right\} h^{(k)}(t) \cdot E \left[\exp \left(- \int_t^{u_j^{(k)}} (1 - L^{(k)}) h^{(k)}(s) ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \right] dt \end{aligned}$$

となる。

5. パラメータ推定

ハザード・プロセスのパラメータの値は、クレジット・スプレッドのマーケット・データから推定することができる。しかし、市場で実際に売買されている個別企業の社債の種類は少なく、ハザード・プロセスの全てのパラメータを推定するのは困難である。例えば、本稿で述べたVasicekタイプのモデルでは、 c, m, σ というパラメータと回収率である L を推定する必要があり、何らかの方法でパラメータを外生的に与えながら、重要なパラメータをインプライドに計算することになる。そこで、最も極端な例として、クレジット・デフォルト・スワップの対象となる債券の発行企業が1種類の債券しか発行していない、もしくは1種類の債券しか市場で流通していない場合の評価方法について検討する。

利用データを1997年3月～1998年4月までの、Moody'sの格付対象となった日本企業の発行する605種類の社債とし、Vasicekタイプのハザード・プロセスを

$$dh(t) = c(m(t) - h(t))dt + \sigma dw_t, \quad h(0) = h_0$$

と記述し、平均的なハザード・レートに時間変動性を持たせる。次に、格付別ハザード率を $\hat{h}^{(k)}$ とし、時点 t で格付が k の企業の、時点 t でのハザード率を $\hat{h}^{(k)}(t)$ で表わす。企業の固有要因やJapan Premium、回収率の差異などの影響による、企業 i のプレミアムの上乗せ分(ハザード率に反映)を $\tilde{h}_{(i)}$ とし、格付が k である企業 i の時点 t での上乗せ分を含めたハザード率 $h_{(i)}(t)$ を

$$h_{(i)}(t) = \hat{h}^{(k)}(t) + \tilde{h}_{(i)}$$

で計算することにする。なお、この上乗せ分は、期間中一定であると仮定する。

また、回収率 L については、Moody'sの1970年～1998年のデフォルト債券の平均値に近い0.312を利用した。

時点 t での満期 T の債券のクレジット・スプレッド $y(t, T)$ を用いて

$$X(t) = y(t, T)(T - t)$$

$$h(t) = \frac{X(t) - R(t)}{S(t)}$$

$$R(t) = \frac{1}{c} \left(e^{-c(T-t)} - 1 \right) \left((1-L)m(t) + \frac{\sigma^2}{4c^2} (1-L)^2 (e^{-c(T-t)} - 3) \right) \\ + (T-t) \left((1-L)m(t) - \frac{\sigma^2}{2c^2} (1-L)^2 \right)$$

$$S(t) = -\frac{1}{c} \left(e^{-c(T-t)} - 1 \right) (1-L)$$

$$m(t) = h_{(i)}(t)$$

と置き、モーメント法を用いると

$$M_1 = E[h(t)]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n m(t_j)$$

$$M_2 - M_1^2 = E[h(t)^2]$$

$$= \frac{\sigma^2}{2c}$$

$$\therefore \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{X(t_j) - R(t_j)}{S(t_j)} \right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n m(t_j)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{X(t_j) - R(t_j)}{S(t_j)} \right)^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n m(t_j) \right)^2 + \frac{\sigma^2}{2c}$$

が得られる。

ここで、現時点を0とし、利用可能な実績データの時点 $t_{-n} \leq t \leq 0$ とする。上乗せプレミアムは、時点 t_{-n} で計算されるハザード率から算出されるものとし、以下の非線型計画法を解く。

目的関数(最小化) z_1^2, z_2^2, z_3^2

$$z_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=-n+1}^0 \left(\frac{X(t_j) - R(t_j)}{S(t_j)} \right) - \frac{1}{n} \sum_{j=-n+1}^0 m(t_j)$$

$$z_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=-n+1}^0 \left(\frac{X(t_j) - R(t_j)}{S(t_j)} \right)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{j=-n+1}^0 m(t_j) \right) - \frac{\sigma^2}{2c}$$

$$z_3 = X(t_{-n}) - R(t_{-n}) - S(t_{-n}) \times m(t_{-n})$$

制約条件 $c > 0, c < 1$

$\sigma \geq 0, \sigma < 50$

$\tilde{h}_{(j)} < 50$

推定されたパラメータの格付け別の平均値を表1と表2に示す。

表1 パラメータの格付け別平均推定値(1)

格付	サンプル数	平均への回帰スピードc				ハザード・プロセスの標準偏差σ			
		平均	標準偏差	歪度	尖度	平均	標準偏差	歪度	尖度
Aaa	87	0.5208	0.3459	0.3155	-1.5558	0.1178	0.0696	0.3552	-1.3592
Aa1	134	0.5486	0.3264	0.1886	0.1066	0.1337	0.0775	0.4811	-0.7930
Aa2	7	0.3062	0.2710	0.6611	0.0863	0.0831	0.0606	-0.2634	-2.1147
Aa3	5	0.2639	0.1400	-0.8787	0.8895	0.1033	0.0409	-1.6850	2.7543
A1	41	0.1266	0.0467	0.5136	1.1679	0.0764	0.0150	-1.4763	6.5729
A2	32	0.1347	0.1050	2.2319	5.5247	0.0904	0.0387	2.2134	9.9074
A3	34	0.1086	0.0971	2.2832	5.5689	0.0935	0.0276	1.6389	5.7388
Baa1	49	0.1026	0.0405	0.7520	0.6121	0.0900	0.0133	0.3883	0.2166
Baa2	81	0.0972	0.0332	0.6361	-0.0770	0.0947	0.0170	0.7756	1.6371
Baa3	42	0.1389	0.0887	0.7674	-0.8835	0.1108	0.0254	0.2168	-0.9304
Ba1	30	0.0594	0.0273	0.3830	-0.1925	0.1163	0.0263	1.0202	1.2591
Ba2	11	0.0739	0.0510	2.2008	6.7022	0.1560	0.0769	0.5057	-0.1410
Ba3	30	0.0523	0.0137	0.9089	1.3417	0.1148	0.0238	0.3038	-0.5933
Total	583	0.2717	0.2993	1.5101	0.8914	0.1095	0.0540	1.2733	1.7223

表2 パラメータの格付け別平均推定値(2)

格付	サンプル数	プレミアムの上乗せ分			
		平均	標準偏差	歪度	尖度
Aaa	87	0.6820	0.5736	3.2681	13.1048
Aa1	134	0.8679	0.7485	3.2031	14.4861
Aa2	7	0.9883	0.9443	0.9806	-0.9562
Aa3	5	1.7177	1.3550	1.2134	1.2046
A1	41	1.3463	0.8033	0.8705	0.3250
A2	32	1.5496	1.0854	1.4324	1.8521
A3	34	1.3789	0.8377	1.8834	5.2826
Baa1	49	1.3611	0.9130	1.4166	2.0449
Baa2	81	1.4788	0.9819	1.4967	2.4747
Baa3	42	1.8801	0.9257	1.8890	3.9901
Ba1	30	0.3211	1.4804	0.8344	0.1796
Ba2	11	2.9952	3.1945	0.1425	-1.5544
Ba3	30	0.6386	1.4076	0.7823	-0.1490
Total	583	1.1492	1.1088	1.6095	5.2143

単位：ハザード・プロセスの標準偏差 % プレミアムの上乗せ分 ×100%

平均への回帰スピードcは、格付が高いほど高い値となっており、ハザード率は格付が高いほど平均値への戻りが早いことを示している。また、平均への回帰スピードcの標準偏差も、平均値の大きさに比例して増大

する。

また、ハザード・プロセスの標準偏差 σ の平均値は格付によって大きな差はみられないが、その標準偏差は格付によって異なり、高格付で標準偏差が高い。これは、対象となる企業数にもよるが、格付が高いグループでは、ハザード率が安定している銘柄が含まれているためと推察される。プレミアムの上乗せ分 $\tilde{h}_{(i)}$ を格付別に平均したものであり、単位は%を100倍したものである。Ba1の格付を除き、格付が低下するほどプレミアムの上乗せ分が増大していることが分かる。また、格付が低下するほど標準偏差が増大する。これは、格付が低下するほどプレミアムの上乗せ分が大きい企業が増加するためである。

次に、同様の分析を業種別に行なう。表3と表4は各パラメータの業種別の推定値の平均を示す。平均への回帰スピード c の業種別平均値と標準偏差については業種別に大きな差異はみられない。なお、通信業種の値が低くなっているが、対象となっているのはNTT1社であることに注意する必要がある。ハザード・プロセスの標準偏差 σ の業種別平均値と標準偏差では、電力・ガス以外のハザード・プロセスの標準偏差は似たような水準となっている。また、プレミアムの上乗せ分 $\tilde{h}_{(i)}$ の業種別平均値と標準偏差は、業種によりかなりのバラツキがあり、パルプ、不動産、食料品などの業種高い値を示しているが、繊維では逆に負の値となっている。

表3 パラメータの業種別平均推定値(1)

業種	サンプル数	平均への回帰スピード c				ハザード・プロセスの標準偏差 σ			
		平均	標準偏差	歪度	尖度	平均	標準偏差	歪度	尖度
その他金融	18	0.2258	0.0681	-0.6297	-0.1797	0.1261	0.0290	-1.0290	0.0158
ガラス	9	0.0802	0.0337	-1.1560	1.9319	0.0950	0.0260	-0.6057	1.6350
パルプ	4	0.1275	0.0267	0.5632	-2.5330	0.0908	0.0166	1.7896	3.2376
医療品	3	0.1832	0.0380	-1.7047	.	0.0904	0.0105	-0.4111	.
卸売業	33	0.0721	0.0394	0.5831	-0.5286	0.1080	0.0221	0.8530	0.3283
化学	27	0.0785	0.0245	0.6844	0.3997	0.0876	0.0142	0.1758	-0.0574
海運	8	0.0728	0.0314	0.5565	-0.4470	0.0899	0.0132	0.5620	-1.2369
機械	7	0.1689	0.1179	1.6762	3.5358	0.0898	0.0238	0.5646	-0.9448
空運	4	0.0609	0.0142	-0.3384	0.1675	0.0750	0.0104	-0.4825	1.0745
建設	17	0.0720	0.0259	0.3914	-0.0003	0.0920	0.0293	1.8795	3.4785
小売業	25	0.0614	0.0238	2.3817	7.9601	0.1102	0.0238	0.4405	-0.6846
食料品	12	0.1004	0.0497	1.0455	1.0392	0.1526	0.0681	1.2647	0.7593
精密機械	13	0.1138	0.0237	-0.1285	0.3209	0.0961	0.0107	-0.4388	1.0444
石油	9	0.0895	0.0338	1.1427	0.6121	0.0850	0.0147	-0.2567	-1.1149
繊維製品	15	0.0946	0.0537	1.5005	1.4797	0.1034	0.0161	0.1420	-0.6525
通信	1	0.1170	.	.	.	0.0372	.	.	.
鉄鋼	33	0.1001	0.0364	1.0019	0.3551	0.0942	0.0154	0.5302	0.5596
電気機器	43	0.1377	0.0806	1.9354	4.8427	0.0901	0.0246	2.0743	8.9670
電力・ガス	229	0.5312	0.3321	0.2597	-1.4939	0.1267	0.0740	0.4649	-0.8038
非鉄金属	22	0.1352	0.1148	2.5733	6.0750	0.1077	0.0373	2.9918	10.5653
不動産	14	0.0709	0.0293	-0.2515	-1.4727	0.1069	0.0454	0.6105	-1.0986
輸送用機器	22	0.0727	0.0438	0.8126	0.3302	0.0816	0.0255	-1.5544	3.8666
陸運業	15	0.1201	0.0516	-0.2934	0.4751	0.0729	0.0242	-0.8797	1.5208

業種	サンプル数	プレミアムの上乗せ分			
		平均	標準偏差	歪度	尖度
その他金融	18	1.6348	0.4953	-0.0858	-0.5363
ガラス	9	0.7523	1.5972	0.3834	-0.9780
パルプ	4	2.1055	1.2400	-0.4151	-3.1576
医療品	3	0.7092	0.2703	1.3234	
卸売業	33	1.4890	0.7503	0.1146	-0.2519
化学	27	1.9243	1.3655	0.2234	0.2182
海運	8	0.8379	1.0910	-0.4991	0.3605
機械	7	1.0449	0.7973	2.0058	4.0366
空運	4	1.6871	0.9082	1.9428	3.8270
建設	17	1.6760	0.8188	1.0926	0.6705
小売業	25	0.6607	1.5566	1.0167	0.2489
食料品	12	2.3198	3.3224	0.5225	-1.1922
精密機械	13	2.0312	1.1098	1.9482	4.6173
石油	9	1.5959	0.6012	-0.0168	0.4225
繊維製品	15	-0.1870	0.6276	-0.1747	-1.4711
通信	1	0.3953			
鉄鋼	33	1.0055	0.5051	0.9358	0.9616
電気機器	43	1.3898	1.0770	1.8059	3.2843
電力・ガス	229	0.8186	0.7208	3.0686	12.7237
非鉄金属	22	1.7010	1.0617	1.8024	2.9799
不動産	14	1.9589	0.9139	1.1258	1.3437
輸送用機器	22	1.0878	0.9022	0.8268	0.8030
陸運業	15	1.3990	1.2314	1.2069	0.4992

表4 パラメータの業種別平均推定値(2)

6. まとめ

本稿のモデルでは、Vasicek タイプのハザード・プロセスを用いたクレジット・デリバティブの評価モデルを示した。このモデルを用いることのメリットは、ハザード・レートに平均回帰性を持たせられることが上げられる。また、個々の企業のハザード・プロセスが推定されれば、相関を加味したバスケット物の評価も可能である。

謝辞

本稿を纏めるに当たり、楠岡教授(東京大学)、吉田助教授(東京大学)、長山氏(東京三菱銀行・商品開発部)、乾氏(ニッセイ基礎研究所)、二宮氏(日本 IBM)から貴重なご意見を頂戴いたしました。この場をかりて感謝いたします。

References

- [1] Aonuma, K., Nakagawa, H., "Valuation of Credit Default Swap and Parameter Estimation for Vasicek-type Hazard Rate Model", 投稿中, 1998
- [2] Davis, M., Mavroidis, T., "Valuation and Potential Exposure of Default Swaps", *Technical Note*, 1997.
- [3] Duffie, D., Singleton, K., "Modeling Term Structures of Defaultable Bonds", *Working paper*, Stanford University 1994.
- [4] Kusuoka, S., "A Remark on Default Risk Models", *Working paper*, University of Tokyo, 1998.
- [5] Nakagawa, H., "Estimation for Default Swaps with affine class hazard rate", *Working paper*, University of Tokyo, 1998