

ジャンプ拡散過程による企業負債評価

01106850 東京都立大学 木島正明 MASA AKI Kijima
02202920 ニッセイ基礎研究所 * 鈴木輝好 TERUYOSHI Suzuki

1. はじめに

信用リスクを考慮しながら、企業の発行する負債を評価しようとする試みは大きく2つの方法に分けられる。一つはMerton[4]をはじめとする**構造モデル** (Structural approach) である。もう一つはJarrow and Turnbull [1]をはじめとする**誘導モデル** (Reduced-form approach) である。

構造モデルでは、企業の資本構造を明示的に扱うため、例えば、優先債と劣後債を統一的に評価することが可能で、より複雑な資本構造にも対応が可能である。またLeland[2]のように最適資本構造に関する議論を展開でき、企業経営に対する有用な情報を提供できる。ただし、これらのモデルでは、特に短期のクレジットスプレッドが現実的ではなく、市場で観測されるクレジットスプレッドカーブとの整合性を保つことができない場合が多い。一方、誘導モデルでは、デフォルト過程を外生的に与えて企業のデフォルトをモデル化するため、自由度が高く、市場で観測されるクレジットスプレッドカーブと整合的な負債価格を示すことが可能である。ただし資本構造という企業固有の情報を負債価格に反映させることができない。

このように構造モデルと誘導モデルにはそれぞれ一長一短があるが、最近、両者の優れた点を統合しようとする試みがなされている。Madan and Unal[3]は、デフォルトを与えるハザードレート過程が企業資産価値の関数となるように誘導モデルを拡張した。しかし、彼らのモデルでは優先劣後などの複雑な資本構造を扱うことが難しく、また突発的な企業価値の下落があっても、デフォルトが発生しない限り、企業価値が下落前の水準に戻るという構造的な欠陥を持っている。

本論分では、企業の複雑な資本構造に対応が可能で、なおかつ市場で観測されるクレジットスプレッドカーブとの整合性を保つような企業負債評価のフレームワークを提示する。そして、このフレームワークを用いて、企業の発行する割引債価格の解析解を導出する。第1に企業価値がジャンプ拡散過程に従うこと仮定し、第2にポアソン過程に従うジャンプの強度が時間に依存する確定的な関数であることを仮定した。また、我々のモデ

ルは、無リスク金利過程を、市場で観測されるイーロードカーブに整合可能なクラスから選択することができる。

2. モデル

企業価値 $A(t)$ が

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = (\mu(t) - \lambda(t)k)dt + \sigma_A(t)dz_1(t) + (e^Y - 1)dN(t)$$

に従うと仮定する。ただし $N(t)$ は強度 $\lambda(t)$ のポアソン過程で、確率変数 Y は平均 μ_Y 、分散 σ_Y^2 の正規分布に従うとし、 dz_1, dz_2 (後出) とは互いに独立とする。また $k = E[e^Y - 1] = \exp(\mu_Y + \sigma_Y^2/2) - 1$ とする。

一方フォワードレート過程を

$$df(t, T) = \alpha_f(t, T)dt + \sigma_f(t, T)dz_2(t)$$

とすると、無リスク割引債 $P(t, T)$ は

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = \alpha_P(t, T)dt - \sigma_P(t, T)dz_2(t)$$

に従う。ただし $\sigma_f(t, T)$ は時間のみに依存する確定的な関数とし

$$\sigma_P(t, T) = \int_t^T \sigma_f(t, u)du, \quad dz_1(t)dz_2(t) = \rho dt$$

とする。

さて、簡単な計算から $A^T(t) = A(t)/P(t, T)$ とすると、

$$\frac{dA^T(t)}{A^T(t)} = \alpha_A(t, T)dt + \sigma_A(t)dz_1(t) + \sigma_P(t, T)dz_2(t) + (e^Y - 1)dN(t) \quad (1)$$

が成立する。ここで、測度変換

$$\frac{dA^T(t)}{A^T(t)} = \sigma_A(t)dz_1^T(t) + \sigma_P(t, T)dz_2^T(t) + (e^Y - 1)dN^T(t) - k\lambda(t)dt \quad (2)$$

が存在すれば、フォワード中立化法により

$$A^T(t) = A^T(0) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t \Sigma(s, T)^2 ds + \int_0^t \Sigma(s, T) dz^T(s) + \sum_{i=0}^{N(t)} Y_i - k \int_0^t \lambda(s) ds \right\}$$

とできる。ただし

$$\Sigma(t, T)^2 = \sigma_A(t)^2 + \sigma_P(t, T)^2 + 2\rho\sigma_A(t)\sigma_P(t, T)$$

とする。

以上から、時刻 T までに n 回のジャンプがあることを条件とすると、 $\log\{A^T(T)/A^T(0)\}$ はフォワード中立測度 P^T の下で、平均、分散をそれぞれ

$$\begin{cases} \mu_n(T, m(T)) = -\frac{1}{2} \int_0^T \Sigma^2(s, T) ds + n\mu_Y - km(T) \\ \sigma_n(T)^2 = \int_0^T \Sigma^2(s, T) ds + n\sigma_Y^2 \end{cases}$$

とする正規分布に従うことが分かった。ただし $m(T) = \int_0^T \lambda(s) ds$ とする。

3. 解析解とイールドスプレッドについて

まず、企業の発行する割引債（割引社債）価格の解析解を示す。 $\log A^T(T)$ が正規分布に従うこととポアソン過程の性質から導かれる。

定理 1 満期 T においてペイオフ

$$F1_{\{A(T) > F\}} + A(T)1_{\{A(T) \leq F\}}$$

を持つ、額面 F の割引社債価格は

$$D(T, m(T)) = P(0, T) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-m(T)}}{n!} m(T)^n f_n(T, m(T)) \quad (3)$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} f_n(T, m(T)) &= F\Phi(d_1^n) + A^T(0) \exp(d_3^n) \Phi(d_2^n) \\ d_1^n &= \frac{-\log F/A^T(0) + \mu_n(T, m(T))}{\sigma_n(T)} \\ d_2^n &= -d_1^n - \sigma^n(T) \\ d_3^n &= \mu_n(T, m(T)) + \sigma_n(T)^2/2 \end{aligned}$$

とする。また $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布関数である。

劣後債の価格は定理 1 の自然な拡張により導くことができる。結果として、我々のモデルは、Merton[4] の拡張として与えられているより複雑な資本構造にも対応が可能である。

次に、解析解 (3) は市場で観測される任意の割引社債価格を表現できることを示す。

命題 1 ($\lambda(T)$ の存在と一意性) 満期 T 、額面 F を持つ割引社債の市場価格を $D_{mk}(T)$ とする。このとき

$$D_{mk}(T) \leq P(0, T) f_0(T, m(T))$$

ならば、すべての $T \geq 0$ について、 $D_{mk}(T) = D(T, m(T))$ を満たす $m(T)$ すなわち $\lambda(T)$ が、任意の $D_{mk}(T)$ につ

いて一意に決まる。ただし、パラメータ $\sigma_A(t)$, μ_Y , σ_Y , ρ , $\sigma_f(t, T)$, $0 \leq t \leq T$ は与えられているとする。

上の命題における $P(0, T) f_0(T, m(T))$ はジャンプが無いと仮定したときの割引社債の理論価格である。したがって、 σ_A などを調整すれば、解析解 (3) は任意の割引社債価格を表現できる。

最後に、解析解 (3) の $T = 0$ におけるクレジットスプレッドを示し、解析解 (3) が現実的なイールドスプレッドカーブを描けることを示す。構造モデルの欠点は、 $F \leq A(0)$ のとき $\lim_{T \rightarrow 0} \delta(T) = 0$ となることであった。

命題 2 ($T = 0$ におけるイールドスプレッド) 満期 T のクレジットスプレッドを $\delta(T) = -\frac{1}{T} \log \left\{ \frac{D(T, m(T))}{FP(0, T)} \right\}$ とする。このとき $F \leq A(0)$ ならば

$$\lim_{T \rightarrow 0} \delta(T) = \lambda(0) \left\{ 1 - \frac{f_1(0, m(0))}{F} \right\} \geq 0$$

が成立する。ただし等号は $\lambda(0) = 0$ のときのみ成立する。また $F > A(0)$ ならば $\lim_{T \rightarrow 0} \delta(T) = \infty$ となる。

4. 結論

本論分では、構造モデルと誘導モデルを統合し、企業固有の複雑な資本構造に対応が可能で、なおかつ市場で観測されるクレジットスプレッドカーブと整合可能な企業負債評価モデルを提示した。

ところで、構造モデルは、資本構成に関する有用な情報を提供できるので、どちらかといえば、債権者よりも債務者の側に立った理論といえる。一方、誘導モデルはもちろん債権者の側に立った理論である。したがって構造モデルと誘導モデルの統合は、一方で債務者の理論と債権者の理論の統合という側面を持つ。債務者と債権者が同じフレームワークを用いて負債を評価できるならば、より円滑な資金調達・配分が可能になるであろう。

参考文献

- [1] Jarrow, R.A. and S.M. Turnbull (1995), "Pricing Derivative on Financial Securities Subject to Credit Risk," *Journal of Finance*, **50**, 53-86.
- [2] Leland, H. (1994) "Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure," *Journal of Finance*, **49**, 1213-1252.
- [3] Madan, D. and H. Unal (2000), "A Two-Factor Hazard Rate Model for Pricing Risky Debt and the Term Structure of Credit Spreads," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **35**, 43-65.
- [4] Merton, R.C. (1974) "On the Pricing of Corporate Debt: the Risk Structure of Interest Rates." *Journal of Finance*, **29**, 449-470.