

最適資産配分問題に対する シミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル

01505910 慶應義塾大学 * 枇々木 規雄 HIBIKI Norio

1 はじめに

本研究では、長期的な動的投資政策のための最適資産配分決定問題について議論する。枇々木[1]はモンテカルロ・シミュレーションによるパスを用いて不確実性を記述した確率制御(動的確率計画)モデルの枠組みのもとで、実際に問題を解くために線形計画問題として記述できるモデル化(定式化)を提案している。このタイプのモデルは「シミュレーション型多期間確率計画モデル」と呼ばれる。このように、実際に多期間確率計画問題を解くためのモデルとして、近似の方法が異なる以下の二種類のタイプのモデルを用いることができる。

- シナリオ・ツリー型多期間確率計画モデル
- シミュレーション型多期間確率計画モデル

将来のある時点(t 時点)の投資の意思決定は、 $t-1$ 時点までにどのような状態が生じたかによって(t 時点の状態を前提にして生じる $t+1$ 時点以降の状態を考慮して)、決められるはずである。シナリオ・ツリー型モデルはこのような「投資の意思決定」の適切さを忠実にモデル化している。一方、シミュレーション型モデルは、「不確実性の記述」を精細にするのと引き換えに、投資の意思決定は簡便化している。将来のある時点(t 時点)の投資の意思決定は、 $t-1$ 時点でどのような状態が生じたかを考慮しないで決めることを前提にしたモデル化である。この二つのモデルはそれぞれのモデルにおいても、問題の規模を固定すれば、「投資の意思決定」と「不確実性の記述」はトレードオフ関係にあるが、モデル間においてもどちらを重視するかによってモデルの選択が行われることになる。

本研究では、二種類のタイプのモデルの長所を組み合わせ合わせたモデル、すなわちシナリオ・ツリー型モデルの「投資の意思決定」の適切さとシミュレーション型モデルの「不確実性の記述」の精細さを組み合わせ合わせたモデルとして、シミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデルを提案する。提案するモデルは、将来の資産価格変動はモンテカルロ・シミュレーションによって生成された複数のサンプル・パス(シミュレーション経路)を用いるが、投資の意思決定はシナリオ・ツリーのように時間経過とともに意思決定を行うノードが広がる条件付き意思決定を許すモデルである。

2 投資の意思決定とモデル化

t 時点における意思決定が $t+1$ 時点で複数の状態に影響を与えるような意思決定であれば、不確実性下での意思決定となる。危険資産に対して同一の意思決定を行うノードでシミュレーション経路を束ねていき、意思決定のためのツリーを生成する。このツリーをシナリオ・ツリーや通常の決定ツリーと区別するために、拡張決定ツリーと呼ぶことにする。拡張決定ツリーを生成する一つの方法として、逐次的にクラスター分析を行い、グループに分ける方法(逐次的クラスタリング法と呼ぶ)を示す。期間1の収益率を用いてクラスター分析を行い、グループ分けを行ったら、期間2では各グループ毎に再度クラスター分析を行い、グループに分ける。逐次的クラスタリング法とは、このような手続きを時間とともに逐次的に実行する方法である。

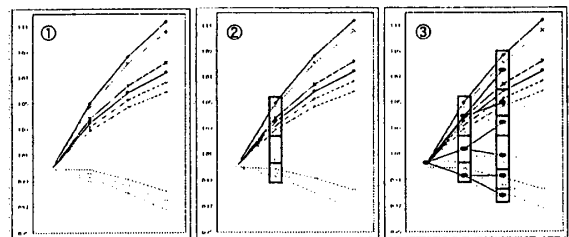


図1: 拡張決定ツリーの図解

ところで、シミュレーション/ツリー混合型モデルは、分岐数が1のときにはシミュレーション型モデル、意思決定ノードを通るサンプル・パスの資産価格(変動)を一つに固定する場合にはシナリオ・ツリー型モデルに相当するタイプとなる、より一般的な多期間確率計画モデルである。

3 モデルの定式化

n 個の危険資産($j = 1, \dots, n$)と現金($j = 0$)に資金を配分する問題を考える。資産0を現金(安全資産)、資産1～資産 n を危険資産とする対象資産数が $n+1$ 個の資産配分問題である。0時点を投資開始時点、 T 時点を計画最終時点とする。「同一意思決定を行うノード」を簡単のために「決定ノード」と呼ぶ。

計画最終時点での富(最終富)の期待値をリターン尺度、最終富の目標富に対する不足分(1次の下方部分積率)をリスク尺度とする最適化モデルを記述する。

(1) 集合および添字

- i : 経路 (パス) を表す添字。
- s : 決定ノードを表す添字。
- s' : s につながる1時点前のノードを表す添字。
- V_t^s : t 時点の決定ノード s に含まれる経路の集合。
- S_t : t 時点の決定ノード s の集合。

(2) パラメータ

- ρ_{j0} : 0 時点の危険資産 j の価格。
- $\rho_{jt}^{(i)}$: t 時点の経路 i の危険資産 j の価格。
- r_0 : 期間 1 (0 時点) の金利。
- $r_{t-1}^{(i)}$: 期間 t ($t-1$ 時点) の経路 i の金利。
- W_0 : 0 時点での初期富。
- W_G : 計画最終時点での目標富。
- W_E : 計画最終時点での投資家が要求する期待富。
- I : 経路の本数 (シミュレーションの回数)。

(3) 決定変数

- z_{j0} : 0 時点の危険資産 j への投資量。
- z_{jt}^s : t 時点の決定ノード s の危険資産 j への投資量。
- v_0 : 0 時点の現金保有額。
- $v_t^{(i)}$: t 時点の経路 i の現金保有額。
- $W_t^{(i)}$: t 時点の経路 i の富。
- $q^{(i)}$: T 時点の経路 i の富の目標富に対する不足分。

(4) 定式化

$$\text{Minimize } \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I q^{(i)} \quad (1)$$

$$\text{subject to} \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j0} z_{j0} + v_0 = W_0 \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} (z_{j1}^s - z_{j0}) = (1 + r_0)v_0 - v_1^{(i)}, (s \in S_1; i \in V_1^s) \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} (z_{jt}^s - z_{j,t-1}^{s'}) = (1 + r_{t-1}^{(i)}) v_{t-1}^{(i)} - v_t^{(i)}, \quad (t = 2, \dots, T-1; s \in S_t; i \in V_t^s) \quad (5)$$

$$W_T^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{jT}^{(i)} z_{jT}^{s'} + (1 + r_{T-1}^{(i)}) v_{T-1}^{(i)}, \quad (s' \in S_{T-1}; i \in V_{T-1}^{s'}) \quad (6)$$

$$\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I W_T^{(i)} \geq W_E \quad (7)$$

$$W_T^{(i)} + q^{(i)} \geq W_G, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (8)$$

$$z_{j0} \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n) \quad (9)$$

$$z_{jt}^s \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T-1; s \in S_t) \quad (10)$$

$$v_0 \geq 0 \quad (11)$$

$$v_t^{(i)} \geq 0, \quad (t = 1, \dots, T-1; i = 1, \dots, I) \quad (12)$$

$$q^{(i)} \geq 0, \quad (i = 1, \dots, I) \quad (13)$$

4 数値実験

- 3 期間
- シミュレーション経路 : 1,000 経路
- 対象資産 : 株式、債券、CB、現金 (コール)
- 制約式、決定変数 : 約 4,000
- 計算時間 (Pentium 700MHz): カッコ内は分岐数。
[2] 約 65 秒, [3] 約 80 秒, [4] 約 5 秒, [5] 約 15 秒
- ソフトウェア: NUOPT (数理システム)

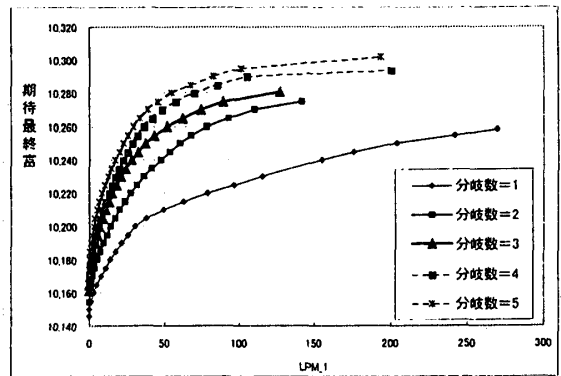


図 2 : 効率的フロンティア

5 結論と今後の課題

本研究では、多期間にわたる最適資産配分決定のためのシミュレーション/ツリー混合型確率計画モデルを提案した。本研究で提案したモデルは従来提案されている2つのモデル間でトレード・オフ関係にあると考えられている特徴 (長所) をともに生かすことのできるモデル化である。

モデルの振る舞いを検証するために、1,000 サンプルの簡単な数値実験も行った。リスクとリターン間のトレード・オフの関係や具体的な資産配分政策を示した。

参考文献

- [1] 柁々木規雄, 戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル, 日本金融・証券計量・工学学会 1999 年冬季大会予稿集, pp. 36-55.
- [2] J.M. Mulvey and W.T. Ziemba, Asset and Liability Management Systems for Long-Term Investors: Discussion of the Issues, Chapter 1 in "Worldwide Asset and Liability Modeling", 1998.