信頼性モデルにおける最適分割方策

01400043 愛知工業大学 *中川覃夫 NAKAGAWA Toshio
01701193 愛知工業大学 安井一民 YASUI Kazumi
01204194 流通科学大学 三道弘明 SANDOH Hiroaki

1. まえがき

信頼性モデルにおいて，コンポーネントなどを冗長化することにより，信頼性が向上するいくつかのモデルが存在する．ここでは，逆に，ある特性値を分割することによって，信頼性が高くなったり，期待費用が小さくなるような5つのモデルを紹介する．

2. 点検方策

システムの故障分布が区間 $[0,S]$ の一様分布に従うとき，$0<T_1<T_2<\cdots$ で点検を実施する．このとき，期待費用は，

$$C=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{T_k}^{T_{k+1}}[c_1(k+1)+c_2(T_{k+1}-t)]\frac{dt}{S}, \tag{1}$$

で与えられる．ここで，c_1 は1回の点検費用，c_2 は故障から発見までの単位時間当りの損失費用を表わす．

文献[1] より，n^* が，

$$n(n+1)\geq\frac{2c_2S}{c_1}\qquad(n=1,2,\cdots), \tag{2}$$

を満たす最小の整数として与えられるとき，最適点検時間列 $\{T_k^*\}$ は次式より求められる．

$$T_k^*=\frac{kS}{n^*}+k(n^*-k)\frac{c_1}{2c_2}$$
$$(k=0,1,2,\cdots,n^*). \tag{3}$$

3. ハードディスクのバックアップ方策

ハードディスクの全容量を S とし，$S/n\,(n=1,2,\cdots)$ の容量が使用(占有)された時点で，バックアツプを実施する[2]．バックアップに要する実行時間を aS/n $(0<a<1)$ とし，ハードディスクの故障分布を指数分布 $(1-e^{-\lambda t})$ と仮定する．このとき，1つのバックアップ間隔の期待費用は，

$$C(1)=c_1e^{-\lambda(a+1)S/n}$$
$$+\int_{\frac{S}{n}}^{\frac{(a+1)S}{n}}[c_1+\frac{c_2S}{n}+C(1)]\lambda e^{-\lambda x}dx$$
$$+\int_0^{\frac{S}{n}}[c_2x+C(1)]\lambda e^{-\lambda x}dx,$$

で与えられる．ここで，c_1 は1回のバックアップの固定費用，c_2 はハードディスクの故障によりデータを失う単位時間当りの損失費用を表わす．

従って，ハードディスクの全容量が使用されるまでの期待費用は，

$$C(n)\equiv nC(1)$$
$$=nc_1e^{\lambda aS/n}+\frac{nc_2}{\lambda}e^{\lambda aS/n}(e^{\lambda S/n}-1)-c_2S. \tag{4}$$

期待費用 $C(n)$ を最小にする n^* を求めるため，$S/n=T$ とおくと，(4) 式は，

$$C(T)=S\left[\frac{c_1e^{\lambda aT}+c_2e^{\lambda aT}(e^{\lambda T}-1)}{T}-c_2\right]. \tag{5}$$

(5) 式を T で微分して，0 とおくと，

$$\lambda T(c_1a+c_2e^{\lambda T})+c_2(\lambda aT-1)(e^{\lambda T}-1)=c_1. \tag{6}$$

上式の左辺は，0 から ∞ の単調増加関数であるから，(6) 式を満たす有限で唯一の T^* が存在し，次の最適方策を得る．

(i) もし，$T^*<S$ ならば，$[S/T^*]\equiv n$ ($[x]$ はガウス記号で，x を超えない最大の整数を表わす) とおき，(4) 式から，$C(n)$ と $C(n+1)$ を比較する．もし，$C(n)\leq C(n+1)$ ならば，$n^*=n$ であり，$C(n)>C(n+1)$ ならば，$n^*=n+1$ である．

(ii) もし，$T^*\geq S$ ならば，$n^*=1$ であり，全容量 S が使用された時点で，バックアップを実施する．

明らかに，(6) 式の左辺は，a の単調増加関数であるから，T^* は a の減少関数である．さらに，S が十分大きいならば，n に無関係に，実行時間が T^* 毎にバックアップを実施すればよい．

4. 二重化によるチェックポイント方策

2つのモジュールにより誤り検出を行うプロセスを考える．プロセスの処理時間を S として，$S/n=T$ でチェックポイントを設定し，2つのモジュールの処理結果を比較する．1つのプロセスで，誤りが発生する確率分布を指数分布 $(1-e^{-\lambda t})$ とすると，1つのチェックポイント間隔における平均実行時間[3] は，

$$L(1)=(T+c_1)e^{2\lambda T}+c_2(e^{2\lambda T}-1).$$

ここで，c_1 は2つのモジュールの処理結果を比較するためのオーバヘッド，c_2 は誤りが発生したとき，再処理を実行するために要するオーバヘッドである．

従って，全てのプロセスの実行が終了するまでの平均時間は，

$$L(n)=(S+nc_1)e^{2\lambda S/n}+nc_2(e^{2\lambda S/n}-1)$$
$$(n=1,2,\cdots). \tag{7}$$

(7) 式を最小にする n^* を求める．$n=S/T$ とおくと，

$$L(T)=S\left[(1+\frac{c_1}{T})e^{2\lambda T}+\frac{c_2}{T}(e^{2\lambda T}-1)\right]. \tag{8}$$

(8) 式を T で微分して 0 とおくと，

$$2\lambda T^2+(c_1+c_2)\cdot 2\lambda T+c_2e^{2\lambda T}$$
$$=c_1+c_2. \tag{9}$$

従って，(9) 式を満たす有限で唯一の T^* $(0<T^*<\infty)$ が存在し，3節と同じ最適方策を得ることができる．

5. ジョブの分割

実行時間 S をもつジョブを n 個のタスクに分割して実行する．1つのタスクの処理が失敗する確率を指数分布 $(1-e^{-\lambda S/n})$ とおく．もし，タスク処理が失敗するならば処理を再実行し，成功するまで引き続いて実行する．このとき，ジョブが成功するまでの平均実行時間[4] は，

$$L(n)=(S+nc_1)e^{\lambda S/n}+nc_2(e^{\lambda S/n}-1). \tag{10}$$

ここで，c_1 は1回のタスク処理の成否を判定するに要する時間，c_2 はタスク処理が失敗したとき，再実行のために要する時間を表わす．

従って，4節において，2λ を λ と置き替えることによって同じ結果を得る．

6. ネットワークの分割

2つの端点をもつネットワークを，$(n-1)$ 個のノードをもつ n 個の枝に分割する．1つのノードの信頼度を q $(0<q<1)$，1つの枝の信頼度を $e^{-\lambda S/n}$ とおくと，このネットワークの信頼度[5] は，$q^{n-1}e^{-\lambda S}$ である．

このネットワークが正常である枝の平均の長さは，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{kS}{n}\binom{n}{k}(e^{-\lambda S/n})^k(1-e^{-\lambda S/n})^{n-k}$$
$$=Se^{-\lambda S/n}. \tag{11}$$

従って，ノードの信頼度を考慮した枝の平均長さは，

$$L(n)=q^{n-1}Se^{-\lambda S/n}. \tag{12}$$

故に，$L(n)$ を最大にする n^* は，

$$n(n+1)\geq\frac{\lambda S}{-\ln q}, \tag{13}$$

を満たす最小の整数として求められる．

参考文献

[1] R. E. Barlow and F. Proschan, "Mathematical Theory of Reliability", John Wiley & Sons, New York, 1965.

[2] H. Sandoh and H. Kawai, "An optimal $1/N$ backup policy for data floppy disks under efficiency basis", J.O.R.S.J, Vol.35, No.4, pp.366-372, 1992.

[3] 福本 聡，中川さより，石井直宏，"二重化による誤り検出のための最適チェックポイント間隔"，電子情報通信学会論文誌 D-I, Vol.J80-D-I, No.8, pp.1031-1033, 1997.

[4] Mitsuhiro Imaizumi, Kazumi Yasui and Toshio Nakagawa, "Reliability of a job execution process using signatures", Proceedings of The First Western Pacific and Third Australia-Japan Workshop on Stochastic Models in Engineering, Technology and Management, pp.176-181, 1999.

[5] Wei-Jenn Ke and Sheng-De Wang, "Reliability evaluation for distributed computing networks with imperfect nodes", IEEE Trans. on Reliability, Vol.46, No.3, pp.342-349, 1997.