2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

DEA 乗法モデルに対する領域限定法

01405390 東京理科大学 生田目 崇 NAMATAME Takashi
東京理科大学 *谷本 泰映 TANIMOTO Hiroaki
01701440 東京理科大学 山口 俊和 YAMAGUCHI Toshikazu

1 はじめに

DEA (Data Envelopment Analysis) は Charnes, Cooper and Rhodes により提唱された多入力多出力系システムの相対的効率性分析手法である．効率性の指標は，ウェイト付けして一元化した出力値を同様に一元化した入力で割ることで得られる．またそのウェイトは，複数の活動主体 (DMU; Decision Making Unit) それぞれに対して有利になるようにつけられる．さらに，非効率的と判定されるようなDMUに対しては効率的となるための改善案を得ることができる．

DEA の問題点として，各 DMU に都合のよいウェイト付けを許してしまうため，まったく考慮されない項目 (ウェイトが0になるような項目) がしばしば存在することが挙げられる．この問題を解決するために，Wong ら [2] はウェイトの取りうる幅に制約を置くための領域限定法を提案している．しかし，もともとの DEA モデルのウェイトには単位を一元化する役割もあるため，その制約には単位も考慮する必要がある．

従来の線形関数型の DEA に対し，Banker ら [1] は経済学における代表的な生産関数である Cobb-Douglas 生産関数を多入力多出力に拡張した DEA 乗法モデル (DEA Multiplicating Model) を提案した．このモデルでは単位を一元化するウェイトが分離されるため，重要度としてのウェイトを求めることができる．

本稿では，DEA 乗法モデルにおけるフロンティアの性質について述べ，さらに DEA 乗法モデルに対する領域限定法モデルを示す．

2 DEA 乗法モデル

DEA 乗法モデルは，Cobb-Douglas 生産関数を多入力多出力システムに拡張した形となっており，その入力指向モデル (フロンティア・モデル) は以下のように表される．

[P1]

$$\min \quad -P_1 \cdot \hat{\gamma}_a + P_2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \hat{s}_{ia} + \sum_{r=1}^{k} \hat{s}_{ra} \right) \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad -\hat{\gamma}_a + \hat{X}_{ia} = \sum_{j=1}^{n} \hat{X}_{ij}\lambda_{ja} + \hat{s}_{ia}, \quad i = 1, \cdots, m \quad (2)$$

$$\hat{Y}_{ra} = \sum_{j=1}^{n} \hat{Y}_{rj}\lambda_{ja} - \hat{s}_{ra}, \quad r = 1, \cdots, k \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ja} = 1 \quad (4)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \cdots, n \quad (5)$$

ただし，^のついた変数は対数変換したものである．また，γ_a^* は自由変数である．P_1, P_2 は順位係数であり，$P_1 \ggg P_2$ である．

(2) 式について，X_{ia} を $k(>0)$ 倍することを考える．この場合，$\hat{X}_{ia}$ は $\hat{X}_{ia} + \hat{k}$ となる．この場合，(2) 式は次のようになる．

$$-\hat{\gamma}_a + \hat{X}_{ia} + \hat{k} = \sum_{j=1}^{n} (\hat{X}_{ij} + \hat{k})\lambda_{ja} + \hat{s}_{ia} \quad (6)$$

よってこれを展開すると，

$$-\hat{\gamma}_a + \hat{X}_{ia} + \hat{k} = \sum_{j=1}^{n} \hat{X}_{ij}\lambda_{ja} + \hat{k}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ja} + \hat{s}_{ia} \quad (7)$$

となる．(4) 式の制約より (7) 式は以下のようになる．

$$-\hat{\gamma}_a + \hat{X}_{ia} + \hat{k} = \sum_{j=1}^{n} \hat{X}_{ij}\lambda_{ja} + \hat{k} + \hat{s}_{ia} \quad (8)$$

したがって，DEA 乗法モデルは単位の変換に関してはフロンティアの形状の変化はないので，求められるウェイトも変化しない．$k = 5, 10$ とした両対数グラフを図 1 に示す．

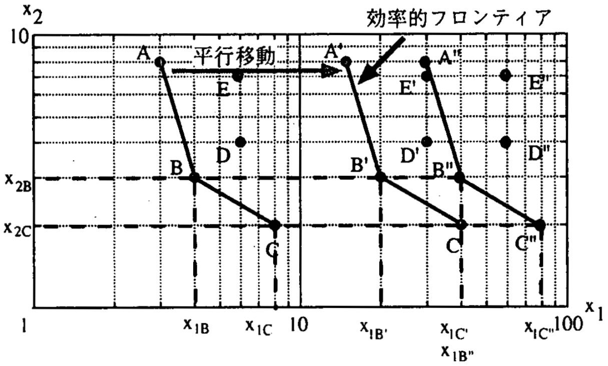

図 1: DEA 乗法モデルにおけるフロンティア

3 DEA 乗法モデルに対する領域限定法

DEA における領域限定はフロンティア・モデルではなく乗数モデルのウェイト変数に対して行われる．そこで，DEA 乗法モデルの乗数モデルに対し領域限定をおこなう．入力項目に対するウェイトに制限を加えたモデルを [P2] に示す．

[P2]

$$\max \quad -\sum_{i=1}^{m} \hat{X}_{ia}v_{ia} + \sum_{r=1}^{k} \hat{Y}_{ra}u_{ra} + \eta_a \tag{9}$$

$$\text{s.t.} \quad -\sum_{i=1}^{m} \hat{X}_{ij}v_{ia} + \sum_{r=1}^{k} \hat{Y}_{rj}u_{ra} + \eta_a \leq 0, \quad j = 1, \cdots, n \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_{ia} = 1 \tag{11}$$

$$b_i^L v_{1a} \leq v_{ia} \leq b_i^U v_{1a}, i = 1, \cdots, m \tag{12}$$

$$u_{ra} \geq 0, \quad r = 1, \cdots, k \tag{13}$$

$$v_{ia} \geq 0, \quad i = 1, \cdots, m \tag{14}$$

[P2] の双対問題は次の [P3] のようになる．

[P3]

$$\min \quad -P_1 \cdot \hat{\gamma}_a + P_2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \hat{s}_{ia} + \sum_{r=1}^{k} \hat{s}_{ra} \right) \tag{15}$$

$$\text{s.t.} \quad -\hat{\gamma}_a + \hat{X}_{1a} + \sum_{i=1}^{m-1} A_i b_{1a}^L - \sum_{i=1}^{m-1} B_i b_{ia}^U = \sum_{j=1}^{n} \hat{X}_{1j}\lambda_{ja} + \hat{s}_{ia} \tag{16}$$

$$-\hat{\gamma}_a + \hat{X}_{i+1,a} - A_i + B_i = \sum_{j=1}^{n} \hat{X}_{i+1,j}\lambda_{ja} + \hat{s}_{i+1,a}, \quad i = 1, \cdots, m-1 \tag{17}$$

$$\hat{Y}_{ra} = \sum_{j=1}^{n} \hat{Y}_{rj}\lambda_{ja} - \hat{s}_{ra}, \quad r = 1, \cdots, k \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ja} = 1 \tag{19}$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \cdots, n \tag{20}$$

ただし，[P3] の A_i, B_i は [P2] の領域限定制約に対する双対変数である．

4 おわりに

本稿では，DEA 乗法モデルに対する領域限定法を示した．本モデルの特徴は以下の通りである．

- DEA 乗法モデルでは，単位の変換による効率的フロンティアの変形がない
- DEA 乗法モデルでは，ウェイトを直接重要度と見ることができるので，単位を考慮することなくウェイト付けすることができる．

しかし以下のような課題もある．

- 入出力の両者を同時に制限することができない．
- DEA 線形モデルとの比較

参考文献

[1] Banker, R.D. and A. Maindiratta: "Piecewise Loglinear Estimating of Efficient Production Surface," *Management Science*, Vol.32, No.1, pp.126–135 (1986).

[2] Wong, Y.H.B. and J.E. Beasley: "Restricting Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis," *Journal of the Operational Research Society*, Vol.41, No.9, pp.829–835 (1990).