一対比較行列における乗法形と加法形の誤差行列の比較

02602260 日本大学生産工学部 † 三宅 千香子
Nihon University Miyake Chikako
01205220 日本大学生産工学部 篠原 正明
Nihon University Shinohara Masaaki

1 はじめに

一対比較行列の測定値 A は一般に整合行列 W と誤差行列 E から成り立っている．誤差行列が加法形で与えられると仮定する場合ならびに乗法形で与えられると仮定する場合について，誤差分布(誤差行列の要素がしたがう分布)が，固有ベクトル法，幾何平均法，エントロピー法などの各種のウェイトベクトル推定法の推定能力に与える影響をシミュレーション実験により調べる．

2 乗法形と加法形の誤差行列

一対比較行列の測定値を $A=\{a_{ij}\}$，整合行列を $W=\{w_{ij}\}(w_{ij}=w_i/w_j)$，誤差行列部分を $E=\{e_{ij}\}$ とすると，一般に，A は W と E の関数で表せる．

$$A=f(W,E) \tag{1}$$

乗法形誤差行列 E では，関数 $f(W,E)$ が(2)式，加法形誤差行列 E では，関数 $f(W,E)$ が(3)式で表される．

$$f(W,E)=W*E \tag{2}$$
$$f(W,E)=W+E \tag{3}$$

ここで，(2)式の*は要素毎の積 (elementwise product) を表す行列演算であり，$D=B*C$ において $d_{ij}=b_{ij}\times c_{ij}$ となる．又，(3)式の+は通常の行列加算である．すなわち，$D=B+C$ において，$d_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$ となる．

3 誤差分布の考察

誤差行列 $E=\{e_{ij}\}$ の各要素はどのような分布(これを誤差分布と呼ぶ)にしたがうであろうか？誤差分布は測定値が理想的な整合性を持つ値からのずれの分布を表現している．
乗法形誤差行列では，

$$a_{ij}=w_{ij}\times e_{ij} \tag{4}$$

が成立し，したがって両辺の対数をとって

$$\log a_{ij}=\log w_{ij}+\log e_{ij} \tag{5}$$

が成立する．LLSM では，(5)式を線形モデルと考え，最小二乗法を適用しているわけで，$\log e_{ij}$ が正規分布，すなわち，e_{ij} が対数正規分布に従うことを統計学的に暗に仮定しているといえる．誤差が真値の周囲に自然に分布する状況を反映した正規分布とすれば，対数をとった値が正規分布にしたがうということは，元のスケールが指数スケールになっていることを示唆している．すなわち，指数スケール上で真値の前後に自然体で誤差が分布している状況に対応する．乗法形誤差行列において，対数正規分布以外に，一様分布，対数一様分布，双峰分布などを仮定することにより，分布が真値の周辺からより広く前後に分布した状況を想定できる．すなわち，意思決定主体が自然体でない状況下においては(例えば，生命の危険などに直接関係した意思決定を強いられている状況)，誤差は真値の周辺に正規的に分布せず，安全側，危険側，あるいは両側に偏った分布になると考えられる．一方，加法形誤差行列では，

$$a_{ij}=w_{ij}+e_{ij} \tag{6}$$

が成立する．a_{ij} 真値がある区間に一様に分布していて，その区間内に，等間隔で刻まれている値に a_{ij} の測定値を(無理に)決定して固定する際に発生する誤差は，加法形で一様分布にしたがうと考えられる．したがって，加法形誤差行列で e_{ij} が一様分布にしたがう場合は，意思決定主体の a_{ij} 真値の分布が，等間隔で設定された判定値の集合とは独立と考えられる状況を反映していると考えられる．四捨五入的な丸め法では，誤差は0を平均として持つ一様分布，切り捨て的な丸め法では，正値の一様分布，切り上げ的な丸め法では，負値の一様分布にしたがうと考えられる．それでは a_{ij} 真値の分布が判定値の周辺に分布するという状況はどのような分布で表現できるであろうか？ 平均0を持つ正規分布が答えの1つであろう．しかし，e_{ij} が正規分布にしたがうと，$a_{ij}=w_{ij}+e_{ij}$ の値が負になる可能性がある．したがって，左側で打ち切るか，あるいは，折り返した形状に正規分布を修正する必要がある．対数正規分布ならびに対数一様分布は，正規分布，一様分布を指数変換した分布であり，正実現値をとる．したがって対数正規分布，対数一様分布は，a_{ij} 真値の分布と判定値の分布が独立でない場合に，切り上げあるいは切り捨て的丸め法を採用した時の，加法形誤差の分布の一例となりうる．

4 加法形誤差分布と乗法形誤差分布の関係

変数 g が，変数 v と e の関係式(7)で表現できるとする．

$$g=f(v,e) \tag{7}$$

ここで，関数 f が乗法形と加法形の2つの場合を考えよう．

$$g=v\times e \tag{8}$$
$$g=v+e \tag{9}$$

式(8)と(9)において，e はいずれも誤差項であるが，乗法形と加法形を区別するために，前者を m，後者を d で表記すると，次式を得る．

$$g_m=v\times m \tag{10}$$
$$g_d=v+d \tag{11}$$

ここで，g が測定値，v が真値で，m と d は乗法形誤差と加法形誤差であり，確率変数を各々 G_m, G_d, V, M, D とする．(但し，V は確定的)

$$G_m=V\times M \tag{12}$$
$$G_d=V+D \tag{13}$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

以下に, ある真値 $V(=v)$ に対して, 同一の測定値分布 G が得られるために, M と D がしたがうべき確率分布を調べる. (13) 式を (14) 式に変形する.

$$v + D = v \times (1 + \frac{D}{v}) \tag{14}$$

(14) 式と (12) 式を比較すると, 次式を得る.

$$1 + \frac{D}{v} = M \tag{15}$$

あるいは,

$$D = v(M-1) \tag{16}$$

例えば, 加法形誤差分布が [0,1] の一様分布にしたがうならば, 乗法形誤差分布として $[1, \frac{v+1}{v}]$ の一様分布を想定すれば, 同一の測定値分布が得られることを意味する. (15), (16) 式よりわかるが, 一方の分布を与えられるとその時の真値 v に依存した形式で他方の分布が規定されてしまう. すなわち (2) 式あるいは (3) 式の行列の要素毎に異なるパラメータを持つ分布で真値 W を摂動することになる.

5 ウェイト推定法のシミュレーションによる比較実験

固有ベクトル法 (1;EV), 幾何平均法 (2;GM), エントロピー法 (3;ENT) のウェイトベクトル推定法をウェイトベクトル W_0(0; 真値) に対応する整合行列 $W=\{w_{ij}\}$ に加法形誤差と乗法形誤差により各々摂動して生成した測定値 A に適用し, 各推定ベクトル W_{EV}, W_{GM}, W_{ENT} と真値 W_0 との間の相対的距離 d_{ij} を調べることにより, 推定能力の性能評価を行う. ただし, $W_0 = \frac{2}{n(n+1)}[n, n-1, \cdots, 1]^T$.

表 1: 加法形/対数正規分布 ($\mu=0, \sigma_0=0.1$)

—	$n=4$	$n=8$	$n=12$
$\overline{d_{01}}$	0.100940	0.060048	0.073549
$\overline{d_{02}}$	0.101054	0.060453	0.073924
$\overline{d_{03}}$	0.081136	0.038540	0.050749
$\overline{SD_1}$	0.000166	0.000009	0.000028
$\overline{SD_2}$	0.000181	0.000013	0.000037
$\overline{SD_3}$	0.000141	0.000004	0.000016

表 2: 加法形/一様分布 [0,0.2]

—	$n=4$	$n=8$	$n=12$
$\overline{d_{01}}$	0.013337	0.009578	0.007684
$\overline{d_{02}}$	0.013339	0.009585	0.007691
$\overline{d_{03}}$	0.011194	0.006882	0.005083
$\overline{SD_1}$	0.000018	0.000003	0.000001
$\overline{SD_2}$	0.000018	0.000003	0.000001
$\overline{SD_3}$	0.000013	0.000002	0.000001

表 3: 乗法形/対数正規分布 ($\mu=0, \sigma_0=0.1$)

—	$n=4$	$n=8$	$n=12$
$\overline{d_{01}}$	0.044952	0.027502	0.019501
$\overline{d_{02}}$	0.045016	0.027656	0.019652
$\overline{d_{03}}$	0.046580	0.030750	0.023503
$\overline{SD_1}$	0.000480	0.000089	0.000030
$\overline{SD_2}$	0.000481	0.000091	0.000030
$\overline{SD_3}$	0.000524	0.000121	0.000048

表 4: 乗法形/一様分布 [0.5,1.5]

—	$n=4$	$n=8$	$n=12$
$\overline{d_{01}}$	0.061715	0.037389	0.026722
$\overline{d_{02}}$	0.061369	0.036776	0.026207
$\overline{d_{03}}$	0.061334	0.039316	0.029704
$\overline{SD_1}$	0.000817	0.000150	0.000051
$\overline{SD_2}$	0.000810	0.000145	0.000048
$\overline{SD_3}$	0.000826	0.000171	0.000064

6 実験結果の考察

前節の実験結果より以下のことが判明した.

☆ 加法形誤差の場合には, $\overline{d_{03}}$ が $\overline{d_{01}}$ と $\overline{d_{02}}$ よりも 5 ~ 40 %程小さく, エントロピー法の真値推定能力が高い.

☆ 乗法形誤差の場合には, 一部の例外 ($n=3$ の一様分布) を除いて, $\overline{d_{03}} > \overline{d_{01}}$(あるいは $\overline{d_{02}}$) であり, エントロピー法の推定能力は, 固有ベクトル法と幾何平均法と比べて劣る.

☆ ベクトル内散らばり度合の指標であるベクトル内標準偏差の平均値 $\overline{SD}$ も, 乗法形誤差の場合には, 一部の例外 ($n=3$) を除いて, $\overline{SD_3} > \overline{SD_1}$(あるいは $\overline{SD_2}$) が成立する. 一方, 加法形誤差の場合には, $n=3$ 以外では $\overline{SD_3} < \overline{SD_1}$(あるいは $\overline{SD_2}$) が成立している. ベクトル内標準偏差 SD が高いということは, 優劣を明確化したメリハリのあるウェイト付けを行っており, ウェイト逆転などの矛盾が発生する可能性が低いと予想できる.

7 おわりに

誤差分布が各種のウェイトベクトル推定法の推定能力に与える影響をシミュレーション実験により調べ, 加法形誤差の場合にはエントロピー法が, 乗法形誤差の場合には固有ベクトル法と幾何平均法が真値推定能力において優れている点を示した. 誤差分布として, 加法形/乗法形, 正規分布/非正規分布など様々なタイプを検討対象としたが, 現実の意思決定環境における判定値集合タイプに依存した誤差分布タイプの同定は今後の課題である.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.