配置コストをもつ二次元配置問題に対する局所探索について

京都大学　*今堀 慎治　IMAHORI Shinji
01704164　京都大学　柳浦 睦憲　YAGIURA Mutsunori
01001374　京都大学　茨木 俊秀　IBARAKI Toshihide

1　はじめに

二次元配置問題とは, 様々な大きさの長方形を, 二次元平面上に互いに重ならないように配置する問題であり, 位置に対するコスト関数によって計算の複雑さは異なるが, 多くの場合NP困難であることが知られている. 本研究では, コスト関数をきわめて一般的にした配置コストをもつ二次元配置問題 (two-dimensional packing problem with location cost) に対し, 局所探索法に基づくアルゴリズムを提案する. すなわち, 各長方形のコスト関数の最大値の最小化を行う問題である. コスト関数をうまく設定することにより, 様々な問題をこの形に定式化できる. 提案アルゴリズムは, 長方形間の上下, および左右の位置に関する半順序が与えられたとき, これに矛盾しない配置を求めるという村田らのアプローチ [1] に基づいており, コストの最小化を行う動的計画法を組込んで利用している点に特徴がある.

2　問題の定義

長方形集合 $M=\{1,...,n\}$ と, 各 $i \in M$ に対し,

w_i: 長方形 i の幅,

h_i: 長方形 i の高さ,

$p_i(x)$: 長方形 i の x 座標に関するコスト関数,

$q_i(y)$: 長方形 i の y 座標に関するコスト関数,

が与えられる. ただし, 長方形 i の座標とは長方形の左下の頂点の座標を意味する. このとき, 全長方形を二次元平面上に互いに重なりなく配置し, コスト関数値の最大値を最小にすることを求める. なお, 各長方形の回転は許さないものとする. 配置 π における長方形 i の座標を $(x_i(\pi), y_i(\pi))$ と記し,

$$p_{\max}(\pi) = \max_{i \in M} p_i(x_i(\pi)),$$
$$q_{\max}(\pi) = \max_{i \in M} q_i(y_i(\pi)),$$

と定義すると, 問題は以下のように定式化される：

minimize　$p_{\max}(\pi) + q_{\max}(\pi)$　(1)

subject to　すべての $i, j \in M, i \neq j$ に対し, 以下の4条件の1つ以上が成立する:

$$x_i(\pi) + w_i \leq x_j(\pi),\ x_j(\pi) + w_j \leq x_i(\pi),$$
$$y_i(\pi) + h_i \leq y_j(\pi),\ y_j(\pi) + h_j \leq y_i(\pi).$$

なお, この制約条件は, 任意の2長方形間に上下左右いずれかの位置関係があることを表すが, これは長方形が互いに重ならないための必要十分条件である.

本研究で提案する動的計画法では, コスト関数 p_i および q_i として任意の区分線形関数 (不連続, 非凸でもよい) を扱うことができる. コスト関数の設定によって, たとえば以下の問題を扱うことが可能である.

- 全長方形を覆う長方形の面積を最小化する.
- 全長方形を覆う長方形の幅が与えられたとき, 高さを最小化する.
- あるタイプの資源制約スケジューリング問題.

3　解の表現方法

二次元配置問題に対しては, これまでに様々な研究があり, 解の表現方法が多く提案されている [1,2,3]. 本研究では, 順列対 (sequence-pair) 表現 [2] を採用する. 順列対表現では, 長方形の順列の対 $\sigma = (\sigma_+, \sigma_-)$ を考える. ここで, $\sigma_+(k) = i$ は, 順列 σ_+ において k 番目の長方形が i であることを意味する (σ_- も同様). $\sigma = (\sigma_+, \sigma_-)$ より二項関係 $\preceq_\sigma^x$ と $\preceq_\sigma^y$ を,

$$\sigma_+^{-1}(i) \leq \sigma_+^{-1}(j) \text{ かつ } \sigma_-^{-1}(i) \leq \sigma_-^{-1}(j) \Leftrightarrow i \preceq_\sigma^x j,$$
$$\sigma_+^{-1}(i) \geq \sigma_+^{-1}(j) \text{ かつ } \sigma_-^{-1}(i) \leq \sigma_-^{-1}(j) \Leftrightarrow i \preceq_\sigma^y j,$$

と定義する. そして, $i \neq j$ に対して,

$$i \preceq_\sigma^x j \Rightarrow x_i(\pi) + w_i \leq x_j(\pi),$$
$$i \preceq_\sigma^y j \Rightarrow y_i(\pi) + h_i \leq y_j(\pi),$$

を満たす配置 π すべての集合を Π_σ と定義する. 二項関係 $\preceq_\sigma^x$ と $\preceq_\sigma^y$ は, 定義よりそれぞれ半順序関係になり, 順列対表現は, 「$\Pi_\sigma \neq \emptyset$」かつ「任意の配置 π に対し, $\pi \in \Pi_\sigma$ なる σ が存在する」という性質をもつ. Π_σ の中で目的関数 (1) を最小にする配置 π は, 次節で述べるように動的計画法によって効率よく求めることができる. また, σ の探索には後述する局所探索法を用いる.

4 動的計画法

順列対 σ が与えられたとき, 目的関数 (1) を最小にする配置 $\pi \in \Pi_\sigma$ を決定する問題を考え, 動的計画法に基づく多項式時間アルゴリズムを与える. なお, $\preceq_\sigma^x$ と $\preceq_\sigma^y$ の性質から, $p_{\max}(\pi)$ と $q_{\max}(\pi)$ をそれぞれ独立に最小化すれば (1) を最小化できることが示せるので, ここでは, $p_{\max}(\pi)$ を最小化するアルゴリズムを示す. y 座標についても同様である. 計算のため

$I_i = \{j \in M \,|\, j \preceq_\sigma^x i\}$

$f_i(x)$: 全ての $j \in I_i$ に対し $x_i(\pi) \leq x$ を満たす配置 $\pi \in \Pi_\sigma$ における $\max_{j \in I_i} p_j(x_j(\pi))$ の最小値

と定義する. このとき, $f_i(x)$ は, 漸化式

$$
\begin{aligned}
f_i(x) &= \min_{t \leq x} p_i(t), \qquad i = \sigma_+(1) \\
f_i(x) &= \min_{t \leq x} \max\{p_i(t), \max_{j \preceq_\sigma^x i} f_j(t - w_j)\}, \\
&\qquad\qquad i = \sigma_+(2), ..., \sigma_+(n)
\end{aligned}
$$

により計算される.

5 局所探索法

局所探索法とは, 現在の解 σ の近傍 $N(\sigma)$ 内に σ より良い解があればそれに置き換える, という操作を可能な限り反復するものである. 通常, 局所探索を 1 度行っただけでは, 未探索の領域にさらに良い解が隠れているという危惧が残るため, 本研究ではメタ戦略の中から, 多スタート局所探索法 (MLS 法) とタブー探索法 (TS 法) を試みている. MLS 法は多数の初期解それぞれに局所探索を適用し, 得られた最良の解を出力するものであり, TS 法は解のサイクリングを防止しながら, 局所最適解からも解の移動を強制するものである [4]. なお, 初期解はランダムに生成し, 近傍は次に述べる交換近傍とクリティカルパス近傍を用いる. また, 解の評価には $p_{\max}(\pi) + q_{\max}(\pi)$ を用いるが, 目的関数値が同じ解についてはコスト関数値の総和が小さい解へ移動する.

5.1 交換近傍

交換近傍とは, σ_+ と σ_- の一方, もしくは両方の順列において, 二つの長方形の位置を互いに交換することで得られる解の集合である. とくに σ_+ と σ_- の両方において i と j を交換する場合は, 長方形 i と j の平面上での位置を交換する意味をもつ. 全長方形対を交換の対象とするとき, 近傍のサイズは $O(n^2)$ となるが, 本研究では対象とする二つの長方形の一方を, コスト関数値最悪の長方形に限定することにより近傍の縮小を行っている.

5.2 クリティカルパス近傍

以下, x 座標に関する近傍操作についてのみ説明するが, y 座標についても同様である. 配置 $\pi \in \Pi_\sigma$ に対して, 有向グラフ $G = (V, E)$ および長方形の部分集合 S, T を,

$V = M, \quad (i,j) \in E \Leftrightarrow x_i(\pi) + w_i = x_j(\pi)$ かつ $i \preceq_\sigma^x j$,

$S = \{i \in M \,|\, p_i(x_i(\pi)) = p_{\max}(\pi)$ かつ $\frac{d}{dx} p_i(x_i(\pi)) < 0\}$,

$T = \{i \in M \,|\, p_i(x_i(\pi)) = p_{\max}(\pi)$ かつ $\frac{d}{dx} p_i(x_i(\pi)) > 0\}$,

とする. このとき, 始点を $s \in S$, 終点を $t \in T$ とする有向パスをクリティカルパスと定義する. 4 節の動的計画法を用いて得られる任意の配置 π において, S と T は共に空集合にはならず, 1 本以上のクリティカルパスが存在する. また, このクリティカルパスが存在する限り目的関数値の改善は望めない.

クリティカルパス近傍とは, σ_+ と σ_- のいずれかから, クリティカルパス上で隣接する 2 個の長方形 i と j を取り出し, 2 個の長方形がそれぞれあった位置の間に i と j の順序を入れ替えて挿入するという変形で得られる解の集合である. 数式を用いて表現すると, 以下のように変形して得られる解の集合である. ここでは, σ_+ を σ'_+ へ変形する手順のみ示すが, σ_- についても同様である. 現在の解において, $\sigma_+(a) = i, \sigma_+(b) = j$ であるとし, l は, $a \leq l < b$ を満たす任意の定数とする. このとき,

$$
\begin{aligned}
&\sigma'_+(k) := \sigma_+(k+1), \qquad \forall k = a, ..., l-1 \\
&\sigma'_+(l) := j, \\
&\sigma'_+(l+1) := i, \\
&\sigma'_+(k) := \sigma_+(k-1), \qquad \forall k = l+2, ..., b
\end{aligned}
$$

と変形するのである. この近傍に含まれる解は, クリティカルパスを壊す解の中では, 他の長方形の配置への影響が少ないという特徴をもつ. 近傍のサイズは, 最大で $O(n^3)$ となるが, 平均的にはこれよりずっと小さいと思われる.

6 おわりに

本研究では, 配置コストをもつ二次元配置問題の定式化を行い, メタ戦略を用いた近似解法の提案を行った. 数値実験の結果および考察については, 当日発表する予定である.

参考文献

[1] S.Nakatake, K.Fujiyoshi, H. Murata and Y. Kajitani, "Module Placement on BSG-Structure and IC Layout Applications," *Proc. Int'l Conf. on CAD*, pp.484-491, 1996.

[2] H. Murata, K. Fujiyoshi, S. Nakatake and Y. Kajitani, "VLSI Module Placement Based on Rectangle-Packing by the Sequence-Pair," *IEEE Trans. on CAD*, 15, pp.1518-1524, 1996.

[3] D. Liu and H. Teng, "An improved BL-algorithm for genetic algorithm of the orthogonal packing of rectangles," *European Journal of Operational Research*, 112, pp.413-420, 1999.

[4] 柳浦睦憲, 茨木俊秀, 組合せ最適化 ―メタ戦略を中心として―, 朝倉書店, 出版予定.