

## 完全K分木型組織構造の階層間関係追加モデル

01204874 流通科学大学 情報学部 \*澤田 清 SAWADA Kiyoshi  
01012514 流通科学大学 情報学部 宇野 斉 UNO Hitoshi

### 1. はじめに

企業などの組織の階層構造（ピラミッド組織）は、構成主体（個人や部、課など）を頂点に、上下の主体間関係を辺に対応させると、根付き木であると考えることができる。このとき、各頂点間の経路は組織内の主体間の関係をたどる情報伝達経路に対応している。また、根付き木に辺を追加することは、上下の主体間関係以外の追加的關係の形成に相当する[1]。

筆者らは、すでに、高さ $H$ の完全2分木の、深さ $N$ の2頂点間、全兄弟間、および全頂点間に辺を追加するとき、それぞれ、全頂点間の最短経路の長さの総和（以後、総頂点間経路長と呼ぶ）を最小にする追加辺の深さ $N^*$ を求めた[2]。本研究では、より一般化した完全 $K$ 分木に対して、ある深さの頂点とその子孫との間に辺を1つ追加した場合に、総頂点間経路長を最小にする子孫の深さを求めることを考える。これは、完全 $K$ 分木型の構造を持つ組織内のある主体から直系の下位層の主体（部下）に追加的關係形成を行う場合に、どの層の主体と関係を結べば組織全体の情報伝達が最も効率的になるかという問題に対応している。

### 2. 総頂点間短縮経路長の定式化

ここでは、前述したように、高さ $H$  ( $H = 2, 3, \dots$ )の完全 $K$ 分木 ( $K = 2, 3, \dots$ )に対して、深さ $M$  ( $M = 0, 1, \dots, H - 2$ )の頂点と、その子孫である深さ $N$  ( $N = M + 2, M + 3, \dots, H$ )の頂点との間に1辺を追加する。ただし、完全 $K$ 分木は、すべての葉が同じ深さを持ち、すべての内部頂点の次数が $K$ であるような $K$ 分木を指す。また、深さは、根からその頂点までの経路の長さを表す。

このとき、総頂点間経路長が最小となる $N$ を求める。ここでは、上述した1辺の追加前と追加後で総頂点間経路長がどれだけ短縮されたかを定式化する。以後、これを総頂点間短縮経路長と呼び、 $S(N)$ と表すこととすると、

$$\begin{aligned}
 S(N) &= W(H - N) \{W(H) - W(H - M - 1)\} (N - M - 1) \\
 &+ W(H - N) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-M}{2} \rfloor - 1} \{(K - 1)W(H - M - i - 1) + 1\} (N - M - 2i - 1) \\
 &+ \{W(H) - W(H - M - 1)\} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-M}{2} \rfloor - 1} \{(K - 1)W(H - N + i - 1) + 1\} (N - M - 2i - 1) \\
 &+ \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-M}{2} \rfloor - 2} \{(K - 1)W(H - M - i - 1) + 1\} \\
 &\times \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-M}{2} \rfloor - i - 1} \{(K - 1)W(H - N + j - 1) + 1\} (N - M - 2i - 2j - 1) \quad (1)
 \end{aligned}$$

と定式化される。ただし、 $[\cdot]$ は $\cdot$ を超えない最大の整数を表し、 $W(h)(h = 0, 1, 2, \dots)$ は高さ $h$ の完全 $K$ 分木の頂点数を表す。また、 $\sum_{i=1}^{-1} \cdot = 0$ ,  $\sum_{i=1}^0 \cdot = 0$ と定義する。

### 3. 最適頂点深さ

ここで、子孫の深さ $N$ を $N = M + 2L$  (ただし、 $L = 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{H-M}{2} \right\rceil$ ) と  $N = M + 2L + 1$  (ただし、 $L = 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{H-M-1}{2} \right\rceil$ ) の2通りの場合に分けて考える。このとき、 $S(M + 2L)$ と $S(M + 2L + 1)$ について、次の関係が成り立つ。

#### 定理 1

$$S(M + 2L) > S(M + 2L + 1) \quad (2)$$

ただし、 $L = 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{H-M-1}{2} \right\rceil$ である。

(証明略.)

定理1より、総頂点間短縮経路長 $S(N)$ を最大にする $N^*$ を求めるためには、 $N = M + 2L$ の場合だけを考えればよい。すなわち、 $S(M + 2L)$ を最大にする $L^*$ を求めて、 $N^* = M + 2L^*$ とすればよい。

$R(L) = S(M + 2L)$ とおき、 $W(h) = \frac{K^{h+1} - 1}{K - 1}$ を代入して整理すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} R(L) &= \frac{1}{(K-1)^3} \left\{ K^{2H-2M-3L+2} - 2 \cdot K^{2H-M-2L+2} - K^{2H-2M-L+1} + (K+1)K^{2H-M-L+1} \right. \\ &\quad \left. - (K+1)K^{H-M-L+1} + 2 \cdot K^{H-M+1} - (2L-1)(K-1)K^{H+1} \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $R(L)$ の $L$ に関する差分を $\Delta R(L) \equiv R(L+1) - R(L)$ とおくと (ただし、 $L = 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{H-M}{2} \right\rceil - 1$ )、次の解析結果が得られる。

(i)  $K = 2$ かつ $L = 1$ のとき、 $H \leq 2M + 5$ ならば $\Delta R(L) < 0$ 、 $H \geq 2M + 6$ ならば $\Delta R(L) > 0$ である。

(ii)  $K = 2$ かつ $L \geq 2$ 、または $K \geq 3$ のとき、 $\Delta R(L) < 0$ である。

以上より、次の定理2が得られる。

#### 定理 2

(1)  $K = 2$ のとき、 $H \leq 2M + 5$ ならば $N^* = M + 2$ 、 $H \geq 2M + 6$ ならば $N^* = M + 4$ である。

(2)  $K \geq 3$ とき、 $N^* = M + 2$ である。

(証明略.)

### 参考文献

- [1] 宇野 斉, “組織内コミュニケーション・パスの追加効果について”, 組織科学, Vol.27, No.2, pp.73-86 (1993).
- [2] 澤田 清, 宇野 斉, “完全2分木型組織構造への関係追加モデル”, 日本応用数学会論文誌, Vol.10, No.4, pp.335-346 (2000).