

非線形モデルに対するカルマンフィルタ適用の検討

02401980 *中村 剛 NAKAMURA Tuyoshi

01001600 上田 徹 UEDA Tohru

1. 目的

カルマンフィルタは時系列データを分析する方法である。カルマンフィルタを適用できるモデルは線形モデルであるが、カルマンフィルタを非線形モデルに適用できるかを検討する。

2. 滑らかなトレンドを持つカルマンフィルタ^[1]

時点 t から時点 $(t+1)$ への状態変化の構造方程式は

$$x(t+1) = F(t)x(t) + G(t)U(t)$$

時点 t での観測値 $y(t)$ は、 $x(t)$ と関連付けられるので、 $y(t)$ の観測方程式は

$$y(t) = H(t)^t x(t) + W(t)$$

時点 n での観測値 $y(n)$ は、

$$y(n) = \text{トレンド成分} T(n) + \text{季節成分} S(n) \\ + \text{特殊日効果}(n, N_0) + \text{不規則成分} W(n)$$

$$T(t+1) = 2T(t) - T(t-1) \\ \text{：滑らかなトレンドモデル}$$

状態として、トレンド成分と季節成分 ($S=12$) および、特定月の影響を用いることとして以下の式で定義する。

$$x(n) = (T(n), T(n-1), S(n), S(n-1), S(n-2), \dots \\ \dots, S(n-4), S(n-10), L(n))^t$$

このときの、状態空間モデル F, G, H, U は

$$F(t) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} (-1)^t & -1 & 0 \\ I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{0}^t = [0, 0, \dots, 0], \quad (-1)^t = [-1, -1, \dots, -1], \quad I: \text{単位行列}$$

$$H(n) = (1, 0, 1, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, d(n, N_0))^t$$

$$U(n) = (u_1(n), u_2(n))^t$$

$u_1(n)$: トレンド成分の雑音(平均 0、分散 τ^2)

$u_2(n)$: 季節成分の雑音(平均 0、分散 σ^2)

それぞれ正規ホワイトノイズと仮定。

$$U(n): \text{平均} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{分散} \begin{bmatrix} \tau^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

$$d(n, N_0) = 0 \quad n \neq N_0 \\ = L_0 \quad n = N_0$$

3. ロジスティックモデルに基づくカルマンフィルタ

トレンドをロジスティックモデルで表現。

$$\frac{dT/dt}{T} = 1 - \frac{T}{m}$$

時点 t での増加率は時点 $t-1$ で決まるとする。

$$T(t+1) = aT(t)\{1 - T(t)/m\} + T(t)$$

$$\downarrow$$

$$T(t+1) = (ac_{t-1} + 1)T(t)$$

$$c_{t-1} = 1 - T(t-1)/m$$

・状態空間モデル(F)の変更

$$F(t) = \begin{bmatrix} ac_{t-1} + 1 & 0 & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A \end{bmatrix}$$

・パラメタ a, m の推定

ロジスティックモデルのパラメタ a, m を推定する。推定する方法は最小自乗法を用いる。データは15年間分のビールの1世帯当たりの1ヶ月の購入量(リットル)^[2]を用いる。

表-1 パラメタ(a, m)推定

m	a	AIC
7500	0.00450	772.3340
7750	0.00429	772.3339
8000	0.00411	772.3347
8250	0.00400	772.3361
8500	0.00382	772.3379

AIC の値より $m=8000, a=0.00411$ とする。

・逆向きの為のシステム変更

カルマンフィルタで初期値を求めるために、逆向きカルマンフィルタのシステムを変更する。

$$T(t-1) = T(t) - aT(t)\{1 - T(t+1)/m\}$$

$$\downarrow$$

$$T(t-1) = (1 - ac_{t+1})T(t)$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} 1 - ac_{t+1} & 0 & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A \end{bmatrix}$$

パラメータは $m=8000$ に固定し、 a を求めた結果 $a=0.00362$ となる。

・パラメータ τ^2 、 σ^2 の推定

- (1) $\tau^2 = 0.622$ 、 $k=1$ 、対数尤度 $LL(k) = -\infty$ とする。
- (2) τ^2 を固定して状態空間モデルの $LL(k)$ が一番大きくなる σ^2 を求める。
- (3) 求めた σ^2 を固定して $LL(k+1)$ が一番大きくなる τ^2 を求める。
- (4) $|LL(k+1) - LL(k)| < 0.001$ ならば終了。さもなければ $k+1 \rightarrow k$ として(2)に戻る。

4. 結果の分析

$$\tau^2 = 2.304, \sigma^2 = 4.726$$

・適合度 <グラフ>

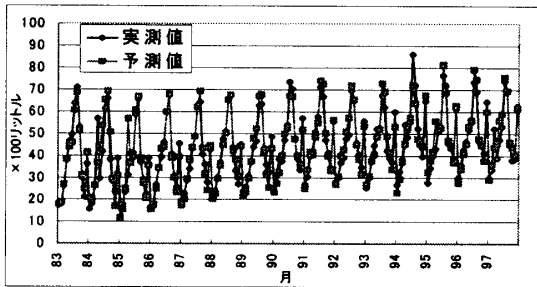


図1 実測値と予測値の適合度(ロジスティックモデル)

・適合度 <誤差分散 $R(n|n-1)$ >

時点 $n-1$ までの全てのデータを用いて時点 n を予測したときの誤差分散を $R(n|n-1)$ とする。

$$R(n|n-1) = 20.47 \quad (1)$$

・滑らかなトレンドモデルとの比較

<滑らかなトレンドモデルの τ^2 、 σ^2 >
 $\tau^2 = 0.082, \sigma^2 = 8.18$

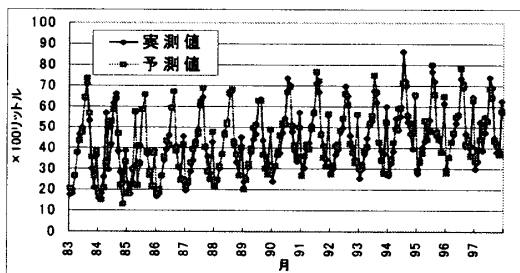


図2 実測値と予測値の適合度 (滑らかなトレンドモデル)

$$R(n|n-1) = 28.11 \quad (2)$$

適合度に関しては誤差分散 (1) と (2) の値よりロジスティックモデルを用いたシステムが若干、優れていることがわかる。

・予測力の検討

モデルがどの程度予測力があるかを、モデル作成に使用しなかった、1998年以降のデータを使用して検討する。

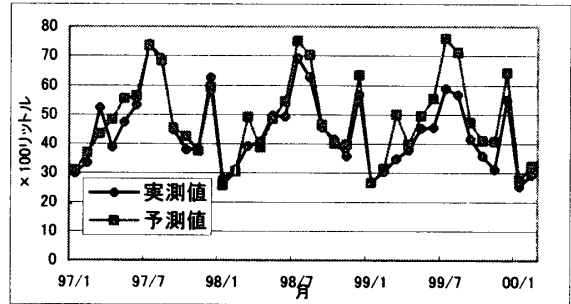


図3 モデルの予測力の検討(ロジスティックモデル)

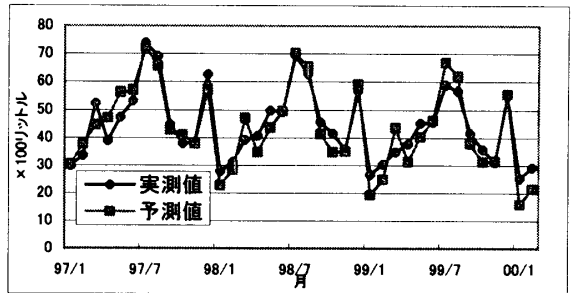


図4 モデルの予測力の検討(滑らかなトレンドモデル)

・自乗誤差和

ロジスティックモデル	1381.27
滑らかなトレンドモデル	757.389

予測力に関しては滑らかなトレンドモデルの方が優れている。

5. 考察

過去のデータにおける適合度と予測力の点から本論文で提案したモデルが有効であることが分かる。しかし、提案したモデルでは1999年以降の実測値と予測値に差が生じている。これは1997年から影響を与えている発泡酒の需要が原因であると考えられ、今後は発泡酒の影響を考慮した分析を考えなければならない。ロジスティックモデルだけでなく Bass モデルに基づくモデルの検討も行う予定である。

参考文献

- [1] 上田徹「予測手法(1)」オペレーションリサーチ (1994.6)
- [2] 「家計調査年報」総務庁統計局