

動的計画法によるプロジェクトファイナンスの分析と応用

入会申請中 九州大学 陳 曉榮
01304556 九州大学 時永 祥三

1 まえがき

特定の担保をもたない投資システムであるプロジェクトファイナンスは、これまで議論されてきたBOT, PFIと共通する側面をもっている。本報告では、投資額の投入の差異による完成遅れ、収益回収の不安定さのリスクを動的計画法を用いて分析し、応用について述べる。

2 投資と回収の問題

投資の方式の1つとして発展途上国へのBOT方式によるインフラ建設、国内における公共団体が委託するPFIなどがある。最近では、プロジェクトファイナンスがこれと類似する投資方式をとっている。投資のリスク分析において、変動過程をブラウン運動などでモデル化し、オプション理論を用いて解析的な解を得ることも可能であるが、範囲は制限される。本報告では、等価な方法である動的計画法を用いて分析し、投資リスク分析など、その応用について述べる [1][2]。

プロジェクトファイナンスにおいては、初期の段階では整備のための投資が継続され、収益が回収されるのは後半になる。また、十分な投資や資材の調達が実施されない場合には完成が遅れ、損失を生む。場合によっては、計画を断念して損害を最小限にとどめる必要がある。これらについて、次のように変動要因を導入してモデル化する。

(1) 整備計画の遅れ

投資金額が不足するなどの問題で整備が遅れるケースを考え、これらを含めてプロジェクトの状態 i を整数値で表す。この数値が大きいほど整備が計画どおりに進んでいるとする。投資方法を選別肢と考え、プロジェクトの状態の推移を変動過程で与える。

時刻 t におけるプロジェクトの状態を i としたときの価値を $V_i(t)$ とする。プロジェクトは追加投資をすることにより価値をたかめることができると仮定する。初期投資

と、このような追加投資を考慮し、以下では、投資の状況に3つがあると仮定し、投資をあきらめる (abandon)、通常の投資をする (continue)、追加投資をする (improve) として区別しておく。

(2) 収益の変動

整備が終了して収益により借入金を返済する場合に、収益が返済金額に満たない場合が発生する。この場合、初期に計画された資金とは別に保証金などの形で返済を補完し、プロジェクトを継続する必要がある。収益の変動過程を導入する。

投資の場合と同様に、収益がマイナスのときには運営を中止して、返済だけを行なうケースをとり入れる。

3 投資の動的計画法による最適化

プロジェクトの進行にあわせて、どの状態を選択することが有理であるかを求める問題となる。追加投資により、プロジェクトの価値 $V_i(t)$ がたかまることが予想されるので、以下では、追加投資と状態遷移には相関があると仮定する。通常投資の費用を $c(t)$ 、追加投資の費用を $\alpha(t)$ とする。投資の期間 (長さ T) を通じて、プロジェクトの価値を最大とする計画は、動的計画問題として記述すると、状態を表す添字である i を用いて、次のようになる。

$$V_i(T) = P_i \quad (1)$$

$$V_i(t) = \max \begin{cases} 0, & \text{abandon;} \\ -c(t) + \sum p_{ij} V_j(t+1) & \text{continue;} \\ -c(t) - \alpha(t) + \sum p_{ij} V_j(t+1) & \text{improve;} \end{cases} \quad (2)$$

ただし、 p_{ij} は、プロジェクトの状態が状態 i から状態 j へと遷移する確率である。 Π_j はプロジェクト整備時における状態に対する評価値である。これは、運用における収益に直接影響すると仮定する。 i の取りうる値は有限の範囲であり、これらを1つの状態とすると、逆方向にDPを計算する場合には、枝分かれの状態を検索する必要がある。

る。最終的には、第1段における選択が決定されるので、今度は、これを順方向にたどることにより、全部の解を計算することができる。

4 回収における保証金の推定

整備が終了したあとに、時刻 $1 \leq t \leq T_2$ において運用により得られる利益 $x(t)$ により返済を実行する。仮に、借入れた金額を均等に C だけ返済すると仮定した場合には、収益が返済金額に満たない場合 ($C > x(t)$) には、保証金 (合計 H) を用いて補完するものとする。補完すべき保証金の金額は、コールオプションと同様な評価式を用いて推定できることが知られている [3]。しかし、以下では、プロジェクトそのものの運用を中止することも考慮したモデルを考察する。

プロジェクトを継続して最後まで (資金を完済するまで) 運用する場合には、

$$H = E\left(\sum_t \max[C(t) - x(t), 0]/(1+r)^t\right) \quad (3)$$

である。ただし、 $C(t)$ は時刻において返済をすべき金額である。簡単化のため、以下では均等返済としておく。

5 応用例

以下では、簡単な例として、次のようなケースを考える。

初期投資 = 50, $T = 6, T_2 = 6$

p_{ij} については, continue では $i + 1/2, i - 1/2$ へと移行し, improve では $i + 1 + 1/2, i + 1 - 1/2$ へと移行する

$c(t), \alpha(t)$ の詳細は省略するが、増加関数としておく。

Π は最大値を 280 とする滑らかな関数 (平均値, 分散を与えた正規分布の分布関数) とする。

$x(t)$ はブラウン運動とする (分散は σ)。

表 1 には、初期状態で improve を選択した場合に、いたる最終状態とそのときの価値、到達確率を示している。また、この表に、同じケースにおける最終状態ごとの投資総額を示し、表 2 には、この投資金額を返済する場合の保証金 H および収益

$$R = E\left(\sum_t \max[x(t) - C(t), 0]/(1+r)^t\right) \quad (4)$$

を示している。

これらの結果から分かるように、最終的に状態が良好で

あるほど、投資金額は小さく、最終的に得られる利益のレベルも高いので、事業としては好ましい結果となる。一方、最終状態が低いと、投資額は大きく、利益も小さいので、全体的に事業評価は低くなる。

しかし、このような結果は一般的な傾向ではなく、パラメータの設定によっては、状態が良好で、かつ、投資額も大きいケースを見出すことができる。

図 1 には分散の変化による H, R の期待値の変化を示している。分散が大きくなると、 H, R はともに大きくなる。

表 1. 到達できる状態と価値, 到達確率

状態 i	4	3	2	1
価値	280	261	235	193
確率	1/16	5/16	7/16	3/16
投資総額	137	142	144	145

表 2. 状態と収益, 保険金の関係 ($\sigma = 5$)

状態 i	4	3	2	1
保険金 H	0.08	0.98	7.3	38
収益 R	62	36	13	0.6

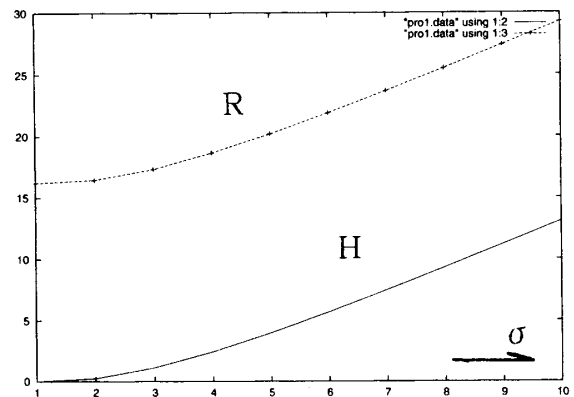


図 1. H, R と σ の関係

参考文献

- [1] A.Huchzermeier and C.H.Loch: "Project management under risk: Using the real options approach to evaluate flexibility in R&D", Management Science, vol.47, no.1, pp.86-101, 2001.
- [2] 高木 昇, 時永 祥三: "多段ファジイ推論による時系列予測を用いた生産切替の評価", 日本オペレーションズリサーチ学会春期全国大会予稿集, 2001.
- [3] 浦谷 規: "プロジェクト・ファイナンスの展開と債務保証モデル", オペレーションズリサーチ, 1998年9月号, pp.491-494