ミレニアムONシリーズの経済効果
― マルコフモデルによる評価 ―

01003676　九州大学　岩本 誠一　IWAMOTO Seiichi

1　はじめに

2000年プロ野球は日米ともに世紀末にふさわしい決戦になった。日本シリーズは、王・ダイエーホークス対長嶋・読売巨人のONシリーズである。ワールド・シリーズはヤンキース対メッツのニューヨーク同士の Subway Series である。日米ともにレニアムにふさわしく、異常に前景気を盛り上げた。結果はどちらも４勝２敗で決まった。さて、2001年はどうなるだろうか。

この報告では、近年、経済数学で用いられる再帰的方法 (recursive method) が、シリーズの優勝確率や経済波及効果を導く有効な方法であることを示す。すなわち二項過程に基づいてシリーズの優勝確率、平均試合数、経済効果などを求める再帰的方法を提案する。再帰的方法はいわゆる埋め込み法 (imbedding method, invariant imbedding) とも言われ、最適化を伴わない動的計画法 (dynamic programming without optimization) である。ここでの再帰的方法は、日シリーズ、ワールド・シリーズに限らず、競争的関係にある２チーム（個人、企業間など）が同一ゲームの繰り返しで勝敗を決めるときに、広くあてはまる。日本シリーズやワールド・シリーズでは「先（勝）４勝ルール」による優勝決定方式だが、プレーオフの「先３勝ルール」などに対しても再帰的考え方が成り立つことがわかる。

2　マルコフモデル

以下では、「先４勝ルール」による優勝決定方式を、便宜上ONシリーズで考える。ホークス (Hawks, H) と巨人 (Giants, G) が**毎回独立**に試合をし、**各試合**でホークス (H) が勝つ確率を p とし、巨人 (G) が確率を $q\ (= 1 - p)$ とする：

$$P(H = \mathrm{Win}) = p, \quad P(G = \mathrm{Win}) = q.$$

$(m+n)$ 試合したとき、**ホークス (H) が** m 勝 n 敗になる**場合の数**と**確率**をそれぞれ $c(m,n)$, $p(m,n)$ で表す。このとき、次の前向き再帰式が成り立つ：

定理 2.1　(場合の数)

$$\begin{aligned} c(m,n) &= c(m-1,n) + c(m,n-1) \\ c(m,0) &= c(0,n) = 1. \end{aligned}$$

この解は、組み合せの数（2項係数）$\{{}_nC_k\}$ を用いて表すと、　$c(m,n) = {}_{m+n}C_m$　になる。

定理 2.2　(勝敗確率)

$$p(m,n) = p(m-1,n)\cdot p + p(m,n-1)\cdot q$$
$$p(m,0) = p^m, \quad p(0,n) = q^n.$$

この解は　$p(m,n) = {}_{m+n}C_m p^m q^n$.

さて、ホークスが i 勝 j 敗（巨人が j 勝 i 敗）した**状態** を (i,j) で表そう。シリーズの**全状態空間** S を、２つに分けて、優勝が決まった状態の集合

$$\begin{aligned} T = \{&(4,0),\ (4,1),\ (4,2),\ (4,3), \\ &(3,4),\ (2,4),\ (1,4),\ (0,4)\} \end{aligned}$$

と、優勝が決まるまでの状態の集合

$$C = \begin{array}{c} (0,0) \\ (1,0),\ (0,1) \\ (2,0),\ (1,1),\ (0,2) \\ (3,0),\ (2,1),\ (2,1),\ (0,3) \\ (3,1),\ (2,2),\ (1,3) \\ (3,2),\ (2,3) \\ (3,3) \end{array}$$

とする。さらに、**状態空間列** $S_0 := \{(0,0)\}$, $S_1 := \{(1,0),(0,1)\}$, $\ldots$, $S_7 := \{(4,3),(3,4)\}$ を導入すると、S は次のように分割される：

$$S = C \cup T = S_0 \cup S_1 \cup \cdots \cup S_7.$$

いま、n 試合したとき、ホークスの勝ち試合数を X_n とし、巨人の勝ち試合数を Y_n とする。このとき、両チームの勝ち数の対から成る列 $\{(X_n, Y_n)\}_0^7$ は状態空間 S 上の**マルコフ連鎖**になる。

$n(i,j)$ を、ホークスが i 勝 j 敗した時点から（どちらかのチームの）優勝決定までの経路の総数とすると、次の後向き再帰式が成り立つ。

定理 2.3 （優勝決定までの経路総数）

$$
\begin{aligned}
n(i,j) &= n(i+1,j) + n(i,j+1) \quad \text{on } C \\
n(i,j) &= 1 \quad \text{on } T.
\end{aligned}
$$

定理 2.4 （反転関係）

$$n(i,j) = c(4-i, 4-j).$$

いま、ホークス (H) が i 勝 j 敗になったとする。このとき、ホークス (H) が優勝する確率を $h(i,j)$ とし、巨人 (G) が優勝する確率を $g(i,j)$ とする。**条件付き優勝確率** $\{h(i,j)\}$ および $\{g(i,j)\}$ はそれぞれ次の後向き再帰式を満たす。

定理 2.5 （優勝確率）

$$
\begin{aligned}
h(i,j) &= p \cdot h(i+1,j) + q \cdot h(i,j+1) \quad \text{on } C \quad (1) \\
h(4,j) &= 1\ ; \quad h(i,4) = 0 \quad i,j = 0,1,2,3 \quad (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(i,j) &= p \cdot g(i+1,j) + q \cdot g(i,j+1) \quad \text{on } C \quad (3) \\
g(4,j) &= 0\ ; \quad g(i,4) = 1 \quad i,j = 0,1,2,3. \quad (4)
\end{aligned}
$$

再帰式 (1),(2) を解くと、最後に $h(0,0)$ が得られる。この $h(0,0)$ がいわゆる**ホークスの優勝確率** q_H である。同じく、式 (3),(4) から求められる $g(0,0)$ は**巨人の優勝確率** q_G である：

定理 2.6

$$q_H = h(0,0), \qquad q_G = g(0,0).$$

3 期待経済効果

さて、ホークスが 4 勝 j 敗で優勝する確率を $q(4,j)$ とし、このきの経済効果を $e(4,j)$ とする。巨人が 4 勝 i 敗で優勝する確率とその経済効果を $q(i,4)$, $e(i,4)$ としよう。このとき、シリーズの**期待経済効果** (expected economic effect) E^3 を経済効果の期待値とする：

$$E^3 := \sum_{j=0}^{3} e(4,j)q(4,j) + \sum_{i=0}^{3} e(i,4)q(i,4).$$

定理 3.1 期待経済効果 E^3 は $f(0,0)$ で与えられる：

$$E^3 = f(0,0).$$

ただし、$f(0,0)$ は以下の再帰式を後向きに解いた最後の値である：

$$
\begin{aligned}
f(i,j) &= p \cdot f(i+1,j) + q \cdot f(i,j+1) \quad \text{on } C \\
f(i,j) &= e(i,j) \quad \text{on } T.
\end{aligned}
$$

ホークスが i 勝 j 敗という条件の下で（のときから）、シリーズ終了までの試合数 τ （T への**到達時間** τ_T）の期待値（**条件付き平均試合数**）を $N(i,j)$ とする：

$$N(i,j) := E_{(i,j)}[\tau].$$

このとき、後向き再帰式が成り立つ：

定理 3.2 （平均試合数）

$$
\begin{aligned}
N(i,j) &= 1 + p \cdot N(i+1,j) + q \cdot N(i,j+1) \quad (i,j) \in C \\
N(i,j) &= 0 \quad (i,j) \in T.
\end{aligned}
$$

たとえば、セ・パのリーグ優勝チームが互角で日本シリーズを戦う ($p = 1/2$ の) とき、平均して

$$N(0,0) = \frac{93}{16} = 5.8125 \text{ (試合)}$$

でシリーズは終了することになる。

状態 $(i,j) \in C$ で試合が行われたとき、その試合の効果を $r(i,j) \in R^1$ としよう。$r : C \to R^1$ を**試合効果関数**という。ホークスが i 勝 j 敗のときからの、総合評価の期待値（**期待総合評価**）を $u(i,j)$ とする：

$$u(i,j) := E_{(i,j)}\left[\sum_{t=i+j}^{\tau-1} r(X_t, Y_t) + e(X_\tau, Y_\tau)\right]$$

期待総合評価 $\{u(i,j)\}$ は次の後向き再帰式を満たす。

定理 3.3 （期待総合評価）

$$
\begin{aligned}
u(i,j) &= r(i,j) + p \cdot u(i+1,j) + q \cdot u(i,j+1) \quad (i,j) \in C \\
u(i,j) &= e(i,j) \quad (i,j) \in T.
\end{aligned}
$$