調和平均によるウェイト推定法の拡張

01104400　法政大学　＊加藤 豊　KATO Yutaka
01007500　慶応義塾大学　小澤 正典　OZAWA Masanori

1. はじめに

一対比較行列からウェイトを推定するとき，主固有ベクトルを用いる固有ベクトル法は，関谷・八巻 [2] により，理論的な意味付けが与えられた．また，Saaty-Vargas[1] は一対比較行列の各行の幾何平均がウェイトの最小２乗推定量であることを示した．本研究では，調和平均もウェイトの最小２乗推定量である [3] との観点から，ウェイトの最小２乗推定量の拡張を試みた．

2. 調和平均法による AHP

Saaty-Vargas は，

問題 ⟨G⟩

$$\min_w \frac{1}{2n(n-1)}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left(\log a_{ij}-\log\left(\frac{w_i}{w_j}\right)\right)^2$$

$$\text{s.t.}\quad \left(\prod_{i=1}^n w_i\right)^{1/n}=1$$

の最適解が $\hat{w}_i=\sqrt[n]{\prod_j a_{ij}}$, $i=1,\ldots,n$ であるので，幾何平均法を提案している．このとき，一対比較行列の整合度（整合性のずれの度合）を問題 ⟨G⟩ の残差平方和とするのが自然であるが，Saaty は，

$$\begin{aligned}\text{C.I.}&=\frac{\hat{\lambda}_{\max}-n}{n-1}\\&=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}\frac{\hat{w}_j}{\hat{w}_i}-n\right)\\&=\frac{1}{2n(n-1)}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{1}{\hat{w}_i\hat{w}_j}\left(\sqrt{a_{ij}}\hat{w}_j-\sqrt{a_{ji}}\hat{w}_i\right)^2\end{aligned}$$

を整合度として提案している．この整合度は，小さな値をとるウェイトがあると，整合性のずれ $\left(\sqrt{a_{ij}}\hat{w}_j-\sqrt{a_{ji}}\hat{w}_i\right)^2$ が小さい場合でも大きい値をとる．

また，調和平均がウェイトの最小２乗推定量であることは，

問題 ⟨H⟩

$$\min_w \frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left(\sqrt{a_{ij}}w_j-\sqrt{a_{ji}}w_i\right)^2$$

$$\text{s.t.}\quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n w_i=1$$

の最適解が

$$H_i=\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_{ij}^{-1}\right)^{-1},\quad H=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n H_i$$

を用いて，$\hat{w}_i=H_i/H$, $i=1,\ldots,n$ で与えられることから分かる．さらに，この問題の残差平方和は，

$$\begin{aligned}\text{C.I.H.}&=\frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left(\sqrt{a_{ij}}\hat{w}_j-\sqrt{a_{ji}}\hat{w}_i\right)^2\\&=\frac{1}{H}-1\\&=\frac{\text{項目数}}{\text{調和平均の和}}-1\end{aligned}$$

である．さらに，

問題 ⟨M_r⟩

$$\min_w \frac{1}{2n^2r^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left(\left(\sqrt{a_{ij}}w_j\right)^{-r}-\left(\sqrt{a_{ji}}w_i\right)^{-r}\right)^2$$

$$\text{s.t.}\quad \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n w_i^{-r}\right)^{-1/r}=1$$

の最適解は，

$$A_{r,i}=\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_{ij}^r\right)^{1/r},\quad A_r=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n A_{r,i}^{-r}\right)^{-1/r}$$

を用いて，$\hat{w}_i=A_{r,i}/A_r$, $i=1,\ldots,n$ で与えられるので，一般平均もウェイトの最小２乗推定量である．

3. 一般的な調和平均法

$f(t), g(t)$ を $R_+=(0,\infty)$ から R_+ への単調な関数とする．このとき，つぎの問題を考える．

問題 ⟨M_f⟩

$$\min_w \frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left(f(a_{ij})g(w_j)-f(a_{ji})g(w_i)\right)^2$$

$$\text{s.t.}\quad g^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(w_i)\right)=1$$

問題 ⟨M_f⟩ は，$f(t)=\sqrt{t}, g(t)=t$ とおくと問題 ⟨H⟩，さらに，$f(t)=t^{-r/2}, g(t)=t^{-r}$ とおくと問題 ⟨M_r⟩ となる．

いま，$f(t)$ に reciprocal 性，

性質 1．　$f(1/t) = 1/f(t)$

を仮定すると，問題 $\langle M_f \rangle$ の最適解は，

$$\hat{w}_i = g^{-1}\left(C \Big/ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\{f(a_{ij})\}^2}\right)$$

ここで,,

$$C = \frac{g(1)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\{f(a_{ij})\}^2}}}$$

で与えられる．この解は，一対比較行列の要素を関数 f で変換したものにおける調和平均を取り，それを関数 g について逆変換したものになる．

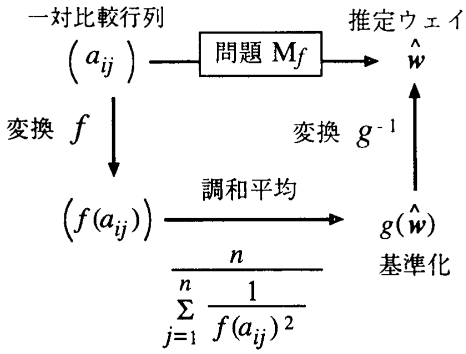

図: 1 : 一般的な調和平均法

ここで性質 1 を満たす関数は，つぎの性質 2，3 を満たす関数の合成関数で表すことにする．

性質 2．$p(-x) = 1/p(x)$

性質 3．$q(1/x) = -q(x)$

したがって，$f(t) = p(q(t)) = (p \circ q)(t)$ となる．

○性質 2 を満たす関数例：

1. $p_1(x) = \exp(ax)$
2. $p_2(x) = \sqrt{1 + a^2x^{2r}} + a \cdot \mathrm{sgn}(x)|x|^r$
3. $p_3(x) =$ 性質 2 を満たす関数の積

○性質 3 を満たす関数例：

1. $q_1(x) = b\log(x)$
2. $q_2(x) = b \cdot \mathrm{sgn}(x - 1/x)|x - 1/x|^s$
3. $q_3(x) = b \cdot \mathrm{sgn}(r(x) - r(1/x))|r(x) - r(1/x)|^s$

   ここで，$r(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x,\ a_i > 0$
4. $q_4(x) =$ 性質 3 を満たす関数の和

もし，p_1, q_1 において，$b = 1/a$ であるならば，$p_1^{-1}(t) = q_1(t)$ となる．また，p_2, q_2 において，$s = 1/r,\ b = (2a)^{-1/s}$ であるならば，$p_2^{-1}(t) = q_2(t)$ となる．

したがって，$(p_1 \circ q_1)(t) = t^r$ という形以外でも関数 f を構成することが可能である．

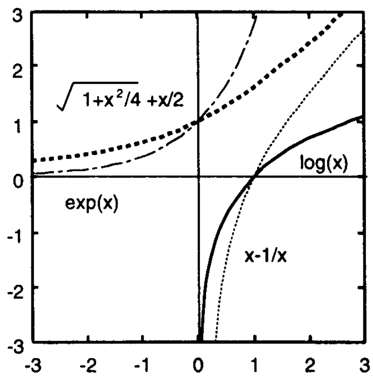

図: 2 : 関数 p, q の例

関数 $g(t)$ については，任意に定めることができるがそのウェイトの変換という性質があるので，比較値の変換関数 $f(t)$ と同じものを採用することが自然である．

また，問題 $\langle M_f \rangle$ における制約式において

$$g^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(w_i)\right) = C/g(1)$$

とおくと，

$$\hat{w}_i = g^{-1}\left(1 \Big/ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\{f(a_{ij})\}^2}\right)$$

となり，C を 1 にすることが可能となる．

4. まとめ

1. ウェイトの最小 2 乗問題として自然な調和平均法の観点から一般化を試みた．その際に，最適化問題の最適解としての形が調和平均を使用する形式を採用した．
2. 一般平均を使用する方法の拡張になっている．
3. 関数 $g(t)$ の設定方法によるが，ウェイトの推定量がある意味で一般的な平均で示されるような場合に，それが最小 2 乗解となっていることが示せた．
4. この拡張であると幾何平均法や固有ベクトル法を含めることはできない．

参考文献

[1] Saaty,T.L., Vargas,L.G. "Comparison of eigenvalue, logarithmic least square and least square methods in estimating ratio", J. Math. Modelling, Vol.5, pp.309-324, 1984.

[2] Sekitani,K. and Yamaki,N. "A logical interpretation for the eigenvalue method in AHP", JORSJ, Vol.42, pp.219-232, 1999

[3] Kato,Y, Ozawa,M "The characteristics of the consistency function of the general mean method",77-82, Proceedings of ISAHP'99, 1999.