2001 年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

多群間の成績を考慮した混合ランキングの生成法

01507350　東京都立工業高等専門学校　*保福 一郎　HOFUKU Ichiro
東京理科大学　大島 邦夫　OSHIMA Kunio

1　はじめに

通常，ランキング決定プロセスは，ランキング対象となる者あるいは物（以下，単に要素と呼ぶ）が複数存在する1グループ（構成集合と呼ぶ）内での共通の競技・試技等の結果により決定されている．本研究の主旨は構成集合が複数存在する場合，これらの集合に対する競技・試技等の結果を様々な角度から考察することにより，構成集合全てを併せたランキングの決定法を与えることにある．ここで本研究では，構成集合をそれぞれ $\{A_i\}$，$(i=1,2,\cdots m)$ とおき，競技・試技及び各 $\{A_i\}$ との間で次の関係をもつものとする．

(1a)　$A_i \cap A_j = \phi,\quad \bigcup_{i=1}^{m} A_i = S$

(1b)　$\sharp A_i = \sharp A_j,\quad (1 \le i,j \le m)$，　ここで，$\sharp A_i$ は，構成集合 A_i の要素の個数を表す．

(1c)　競技・試技は各構成集合 $\{A_i\}$, $(i=1,2,\cdots,m)$ でそれぞれ別個に行われるものとする．

このような関係をもつ集合 S，構成集合 A_i，競技・試技は多々存在する．例えば集合 S を日本プロ野球リーグとし，A_1 をセ・リーグ，A_2 をパ・リーグとすれば，A_1, A_2 の要素数は，それぞれ6チームであり，公式戦において，お互いのリーグを越えた対戦は無い．

本研究では，このような様々な事例をもつ集合 S，構成集合 A_i，競技・試技等を通じ，集合 S の各要素全てに対応したランキング（以下混合ランキングと呼ぶ）の生成法を与えるものである．

2　混合ランキングの生成法

混合ランキングを求める前に，1つの構成集合 A を生成する要素に対し，競技・試技を通じて得られた結果から優位率を考慮した一対比較行列（評価行列 $\boldsymbol{M}$）を生成する．この行列 $\boldsymbol{M}$ は既約行列であるため，Perron-Frobenius の定理を適用でき，絶対値最大の正の固有値に対応した正の固有ベクトル（ランキングベクトル）は，以下の特性を持つ．

(2a) ランキングベクトルは正ベクトルである．

(2b) ランキングベクトルの各成分の大小は，その成分に値する力を表す．

(2c) 勝率の高い要素に対し，高い優位率をもつ要素の方が，勝率の低い要素に対し，高い優位率をもつ要素より，ランキングベクトルの数値が高くなる．

次に，複数の構成集合 A_i, $(i=1,2,\cdots,m)$ に対する共通の競技・試技等を通じて得られた結果から混合ランキングを生成する．その主な概略は，各構成集合 A_i から生成されたランキングベクトルの偏りを定義し，この偏りを基に，ランキングベクトルを調整することより各構成集合全てを併せた混合ランキングを求めるのである．本研究では，(1a)～(1c) を満たす構成集合 A_i において，$\sharp A_i = n$ とし，ある競技・試技を行うことにより得られた構成集合 A_i の評価行列を $\boldsymbol{M}(A_i)$，対応するランキングベクトルを $\boldsymbol{r}(A_i)$ とおく．ここで，次の Lemma を与える．

Lemma 1.　次数の等しい正規化された2つの正ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ における各成分の分散の大小は，各々のベクトルの l_1-norm を調べれば判明する．

Lemma1 より，本研究では構成集合 A_i から生成されたランキングベクトル $\boldsymbol{r}(A_i)$ の指標 $v[\boldsymbol{r}(A_i)]$ を，

$$v[\boldsymbol{r}(A_i)] = ||\boldsymbol{r}(A_i)||_1$$

とすることにより，偏りの指標を定義する．ここで次の Theorem，及び Lemma を与える．

Theorem 1.　行列 A, B をそれぞれ

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} h & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & h & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & h \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} & \boldsymbol{A} & & 0 \\ & & & \vdots \\ 1 & \cdots & & h \end{pmatrix},$$

$$(a_{ji} = 1 - a_{ij},\quad 0 < a_{ij} < 1,\quad 0 < h < 1)$$

とする．このとき，行列 $\boldsymbol{A}$ のスペクトラル半径 $\lambda_{\boldsymbol{A}}$ に対応した正規化された固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\lambda_{\boldsymbol{A}}$ に対応した行列 $\boldsymbol{B}$ の正規化された固有ベクトル $\boldsymbol{y}$ との間において，

$$||\boldsymbol{x}||_1 = ||\boldsymbol{y}||_1$$

が成立する．

Lemma 2.　$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$,　$||\boldsymbol{x}||_2 = 1$ とする．このとき，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n, y_{n+1})^t = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n, y_7)^t$,　$||\boldsymbol{y}||_2 = 1$,　$\alpha \in \boldsymbol{R}$ であり，かつ $||\boldsymbol{x}||_1 = ||\boldsymbol{y}||_1$ であるならば

$$y_{n+1} = \frac{2||\boldsymbol{x}||_1}{1 + {||\boldsymbol{x}||_1}^2}$$

で表せる．

ここで，各構成集合 A_i の要素に対し，ダミー要素 $a_i(n+1)$ を付け加えた集合（拡大構成集合）を

$$A_i^+ = \{a_i(1),\ a_i(2), \cdots, a_i(n), a_i(n+1)\}$$

とする．ここでダミー要素 $a_i(n+1)$ と各 $a_i(k)$, $(k = 1, 2, \cdots, n)$ との優位率の関係を

$$\begin{cases} a[n+1, n+1] &= \quad h, \\ a[k, n+1] &= \quad \dfrac{d}{v[\boldsymbol{r}(A_i)]}, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n,\quad 0 \le d \le v[\boldsymbol{r}(A_i)])$$

と定めると拡大構成集合 A_i^+ から $(n+1)$ 次の行列（拡大評価行列）が生成される．この行列を $\boldsymbol{M}(A_i^+; d)$ とおき，ランキングベクトルを $\boldsymbol{r}(A_i^+; d)$ とすると Theorem1 より，次の2つの Lemma が与えられる．

Lemma 3. 構成集合 A_i に対する評価行列及び拡大評価行列 A_i^+ のそれぞれのランキングベクトル $\boldsymbol{r}(A_i)$, $\boldsymbol{r}(A_i^+;d)$ の間で次の式が成立する．

$$||\boldsymbol{r}(A_i^+;v[\boldsymbol{r}(A_i)])||_1 = ||\boldsymbol{r}(A_i)||_1 = ||\boldsymbol{r}(A_i^+;0)||_1 \quad (2.2)$$

Lemma 4. 各拡大構成集合 A_i^+ における拡大評価行列 $\boldsymbol{M}(A_i^+;d)$ のランキングベクトル $\boldsymbol{r}(A_i^+;d)$ において，第 $(n+1)$ 成分を $h(A_i^+;d)$ とすると，

$$h(A_i^+;v[\boldsymbol{r}(A_i)]) \cong 0$$

となる．

Lemma4 より，$h(A_i^+;d)$ について次の特性を得る．

Property 1. $h(A_i^+;d)$ は，ダミー要素 $a_i(n+1)$ の他の要素に対する優位率を反映させた値となっているため，$d=0$ のときは，$h(A_i^+;0)$ は最大である．次に d が増加するにしたがい，$h(A_i^+;d)$ は単調に減少していき，$h(A_i^+;v[\boldsymbol{r}(A_i)]) \cong 0$ のとき最小となる．

2.1 構成集合が 2 つの場合

本節では，構成集合が A_1, A_2 の 2 つの場合の S における混合ランキングの生成法を述べる．以下本論文では構成集合 A_1, A_2 に対し，

$$v[\boldsymbol{r}(A_1)] > v[\boldsymbol{r}(A_2)]$$

と仮定する。

ここで次の Theorem 及び Property を与える。

Theorem 2. 構成集合 A_i, $(i=1,2)$ において次の等式が成立する．

$$\begin{aligned} & v[\boldsymbol{r}(A_1^+;0)] - v[\boldsymbol{r}(A_2^+;0)] \\ & < \ v[\boldsymbol{r}(A_1^+;v[\boldsymbol{r}(A_2)])] - v[\boldsymbol{r}(A_2^+;v[\boldsymbol{r}(A_2)])] \end{aligned}$$

Property 2. 関数 $f(d)$ を

$$f(d) = v[\boldsymbol{r}(A_1^+;d)] - v[\boldsymbol{r}(A_2^+;d)]$$

と定義すると，$f(d)$ は $0 \leq d \leq v[\boldsymbol{r}(A_2)]$ で下に凸の関数となり $f(v[\boldsymbol{r}(A_2)])$ で最大値をとる．

また，Lemma2 より次の Remark が与えられる．

Remark 1. 構成集合 A_i の評価行列 $\boldsymbol{M}(A_i)$ に対応したランキングベクトル $\boldsymbol{r}(A_i)$ を

$$\boldsymbol{r}(A_i) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t, \qquad ||\boldsymbol{r}(A_i)||_2 = 1 \ ,$$

拡大評価行列 $\boldsymbol{M}(A_i^+;0)$ に対応したランキングベクトル $\boldsymbol{r}(A_i^+;0)$ を

$$\boldsymbol{r}(A_i^+;0) = (y_1, y_2, \cdots, y_n, y_{n+1})^t, \qquad ||\boldsymbol{r}(A_i^+;0)||_2 = 1 \ ,$$

とすれば

$$y_{n+1} = \frac{2||\boldsymbol{r}(A_i)||_1}{1 + ||\boldsymbol{r}(A_i)||_1^2}$$

となる．

これにより次の Lemma が与えられる．

Lemma 5. 構成集合 A_i, $(i=1,2)$ において，

$$h(A_1^+;0) < h(A_2^+;0)$$

が成立する．

Lemma4, 5 及び Remark1 より次の Theorem が与えられる．

Theorem 3. 構成集合 A_1, A_2 における $h(A_1^+;d)$, $h(A_2^+;d)$ の d による大小関係は，$0 < d < v[\boldsymbol{r}(A_2)]$ の範囲内で入れ替わる．

Theorem2,3 及び Property2 から，2 つの拡大構成集合 A_1^+, A_2^+ の各々のランキングベクトル $\boldsymbol{r}(A_i^+;d)$, $(i=1,2)$ の偏りを調整することが可能となり，結果として 2 つの構成集合 A_1, A_2 を併せた混合ランキングを求めることが可能となる．

3 具体的データの適用

混合ランキングを求める適用事例として，日本プロ野球リーグにおける 1996 年から 2000 年までの過去 5 年間の各リーグの勝率結果から，セ・パ両リーグを併せた混合ランキングの生成を行った．

		00	99	98	97	96
A_1	巨人	1	4	3	8	2
	中日	5	1	2	11	4
	横浜	6	5	1	4	9
	ヤクルト	7	7	9	1	11
	広島	9	10	11	10	3
	阪神	12	12	12	9	12
A_2	ダイエー	2	2	7	7	10
	西武	3	3	4	2	6
	日ハム	4	9	5	6	5
	オリックス	8	6	6	3	1
	ロッテ	10	8	10	12	8
	近鉄	11	11	8	5	7

表 1: 過去 5 年間の混合ランキング

参考文献

[1] 保福一郎, 大島邦夫, 既約行列の固有値に関する応用例について, 日本数学教育学会高専部会研究論文誌, Vol2, No.1(1995), 63-76.

[2] K. Oshima and I. Hofuku and K. Horimoto, *Application of Weighted Ranking Methods for Tie-Break Simulations*, Proc. of 7-th Internat. Coll. on Differential Equations, pp.313-320, 1997.

[3] 大島邦夫, 保福一郎, ランキングベクトルとウェイトを適用した試験結果におけるランキング法について, 日本応用数理学会論文誌, Vol. 6 (1996), No.1, pp.133-146.