2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

確率logistic差分方程式

01206600　NTTサービスインテグレーション基盤研究所　＊佐藤　大輔　SATOH Daisuke

1　はじめに

コンピュータネットワークの急速な普及により，コンピュータは我々の生活に必要不可欠な物になりつつある．これにより，ソフトウェアの信頼性はますます重要になってきている．開発側には，より短期に，より信頼性の高いソフトウェアの製造が要求される．このような状況では，ソフトウェアの信頼性評価は非常に重要である．

ソフトウェア開発のテスト工程で発見された総フォールト数がS字形成長曲線を示すとして，ロジスティック曲線やゴンペルツ曲線などが総フォールト数推定に用いられている．これらの曲線は微分方程式で記述されるものであるが，これを厳密解を持つ差分方程式を基にしたモデルに置き換え，この差分方程式を使用することにより，テスト工程初期のデータで従来よりも正確に推定できることが報告されている [4, 6, 7, 8]．さらに多重共線性の解消など統計的な利点も指摘されている [5].

しかしながら，これらの方程式は，決定論的であるため確率的な議論を行うことが不可能であった．本論では，logistic方程式に確率則を導入した確率logistic差分方程式を提案し，nステップにおける累積フォールト数の分布を求める．

2　logistic方程式とlogistic差分方程式

logistic方程式とは以下のような方程式であり，下に示す厳密解を持つ．

$$\frac{dL(t)}{dt} = \frac{a}{k}L(t)\,(k-L(t)) \tag{1}$$

$$L(t) = \frac{k}{1+me^{-at}} \tag{2}$$

次に，logistic方程式を厳密解を持つように差分した方程式 [3] とその解を示す．

$$L_{n+1}-L_n = \delta\frac{a}{k}L_{n+1}(k-L_n), \tag{3}$$

$$L_n = \frac{k}{1+m(1-\delta a)^n}. \tag{4}$$

また，同様に広田によって求められた差分方程式 [2] を以下に示す．

$$L_{n+1}-L_n = \delta\frac{a}{k}L_n(k-L_{n+1}), \tag{5}$$

$$L_n = \frac{k}{1+m\left(\frac{1}{1+\delta a}\right)^n}. \tag{6}$$

これらの差分方程式を回帰式として用いることにより従来手法よりも早期に正確な推定値が得られる [4, 6, 7, 8].

3　確率logistic差分方程式

差分間隔を一定ではなくステップごとに異なる値にし，厳密解あるいは保存量を持つ差分方程式 [1] は不等間隔差分 [2] 方程式とよばれる．ここでは，前節で示した差分方程式に確率則を導入することにより確率logistic差分方程式を提案する．確率logistic差分方程式とは，独立同一分布に従う確率変数列をA_nとして，式(3)を拡張し，

$$L_{n+1}-L_n = \delta\frac{A_{n+1}}{k}L_{n+1}(k-L_n) \tag{7}$$

と表される．厳密解は，

$$L_n = \frac{k}{1+m\prod_{j=0}^{n}(1-\delta A_j)} \tag{8}$$

となる．また，式(5)を拡張し，

$$L_{n+1}-L_n = \delta\frac{A_{n+1}}{k}L_n(k-L_{n+1}) \tag{9}$$

と表され，厳密解は，

$$L_n = \frac{k}{1 + m\prod_{j=0}^{n}\left(\frac{1}{1+\delta A_j}\right)} \tag{10}$$

となる．

今，独立同一確率変数列 X_j がべき関数分布 x^γ に従っていると仮定し，式 (8) において，

$$X_j = 1 - \delta A_j \tag{11}$$

とする．今，n ステップにおける値が $\underline{l}$ より大きい確率 $P\{L_n > \underline{l}\}$ を考える．

$$\underline{l} = \frac{k}{1 + m\underline{x}} \tag{12}$$

とすると

$$\begin{aligned} & P\{L_n > \underline{l}\} & (13)\\ = \ & P\{\prod_{j=1}^{n} X_j < \underline{x}\} & (14)\\ = \ & P\{\sum_{j=1}^{n} \log X_j < \log \underline{x}\} & (15)\\ = \ & P\{\sum_{j=1}^{n} Y_j > -\log \underline{x}\} & (16)\\ = \ & (\exp(\gamma \log \underline{x}))\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-\gamma \log \underline{x})^j}{j!} & (17)\end{aligned}$$

となる．ここで，$Y_j = -\log X_j$ は指数分布の独立同一確率変数列であり，$\sum_{j=1}^{n} Y_j$ がアーラン分布に従うことを用いた．これにより，n ステップにおける値が $\underline{l}$ より大きい確率を求めることが可能となる．

$$X_j = \frac{1}{1 + \delta A_j} \tag{18}$$

とおくことにより式 (10) についても同様である．

4 まとめ

本論では，厳密解を持つ logistic 差分方程式を拡張し，確率 logistic 差分方程式を提案した．この差分方程式も厳密解を持ち，それを示した．これにより，決定論的な方程式では議論不可能であった確率的な議論が可能となり，n ステップでの累積フォールト数の分布を表現することが可能となった．今後は，X_n に課した仮定が実データに当てはまるかどうかの確認を行う．

謝辞

有益な助言を与えてくださった広田良吾早大名誉教授，高橋大輔早大教授に感謝いたします．また，原稿を読んでいただいた熊谷和則氏 (NTT) に感謝いたします．

参考文献

[1] R. Hirota, Conserved Quantities of "Rondom-Time Toda Equation", *J. Phys. Soc. Jpn*, **66** (1997) 283–284.

[2] 広田, 差分方程式講義　連続より離散へ, サイエンス社, 2000.

[3] F. Morishita, The fitting of the logistic equation to the rate of increase of population density. *Res. Popul. Ecol.*, **VII** (1965), 52–55.

[4] D. Satoh, A discrete Gompertz equation and a software reliability growth model, *IEICE Trans.*, **E83-D-7** (2000), 1508–1513.

[5] D. Satoh, A discrete Bass model and its parameter estimation, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **44-1** (2001) 1–18.

[6] D. Satoh and S. Yamada, Discrete equations and software reliability growth models, *Proceedings of 12th ISSRE*, (IEEE Computer Society, Hong Kong, November, 2001) 176–184.

[7] D. Satoh and S. Yamada: Parameter Estimation of Discrete Logistic Curve Models for Software Reliability Assessment, *Japan J. of Industrial and Applied Mathematics*, **19-1** (2002) 39–53.

[8] 山田, 井上, 佐藤, ソフトウェア信頼性評価のための差分方程式に基づく統計的データ解析, 日本応用数理学会論文誌, **12-2** (2002) 155–168.