複数評価者不完全一対比較情報下におけるウェイト推定法

02602260　日本大学生産工学部　†三宅　千香子
Nihon University　MIYAKE Chikako
01011500　日本大学生産工学部　大澤　慶吉
Nihon University　OHSAWA Keikichi
01205220　日本大学生産工学部　篠原　正明
Nihon University　SHINOHARA Masaaki
01300450　筑波大学 (名誉教授)　高橋　磐郎
University of Tsukuba　TAKAHASHI Iwaro

1　はじめに

AHP などの意思決定過程のある段階においては, n 個の項目ウェイトを n 個の項目間の一対比較情報に基づき推定する必要が生じる. この時に, n 個の項目が組織的あるいは地理的あるいはネットワーク的に分散配置されていると, 必ずしも n 個の項目間の ${}_nC_2$ 個の完全一対比較情報が入手可能とは限らず, さらに, それらが複数の評価者により測定される場合も考えられる. このような, 複数評価者不完全一対比較情報下においては, 評価者に依存した特性に基づき一対比較測定値が変形する可能性があり, 評価者の個性パラメータを考慮する必要がある. 以下, 2 章では, 評価者の個性パラメータを考慮した一対比較誤差モデル, 3 章では, 2 評価者 6 項目の例題によるウェイト推定の定式化, 4 章では, 座標軸交互反復法による例題の求解計算結果を示す.

2　評価者パラメータを考慮した誤差モデル

評価者 $k(k=1,\ldots,m)$ が項目 (i,j) 間の一対比較測定を行った際の, 測定値を $a_{ij}(k)$, 項目 i,j の推定するウェイト値を u_i, u_j とし, 次の誤差モデルを仮定する.

$$a_{ij}(k)=(\frac{u_j}{u_i})^{\alpha(k)}\times e_{ij}(k) \qquad (1)$$

ここで, $\alpha(k)$ は評価者 k の個性パラメータで, $e_{ij}(k)$ は $a_{ij}(k)$ 測定にともなう乗法形誤差である.

(コメント 1)　(3) 式は, 逆比性「$a_{ij}a_{ji}=1$」の自然な拡張になっている.

(コメント 2)　個性パラメータ α は評価者の一対比較測定値に対する感度を表す. 例えば, $\alpha=2$ ならば $u_i/u_j=4$ でもその値を $(u_i/u_j)^2=16$ と, 大げさに (鋭敏に) 反応し, 逆に $\alpha=0.5$ ならば $u_i/u_j=4$ でもその値を $(u_i/u_j)^{0.5}=\sqrt{4}=2$ と, のんびりと (鈍感に) 反応する.

3　例題による定式化

図 1 に示す 2 評価者 6 項目のデザイングラフを考える. $a_{ij}(b_{ij})$ は評価者 1(2) による項目 (i,j) 間の一対比較測定データ値 (項目 j と比較した項目 i の優先比率) である. 2 章の表記に従えば, $\alpha(1)=\alpha,\alpha(2)=\beta,a_{ij}(1)=a_{ij},a_{ij}(2)=b_{ij}$ である.

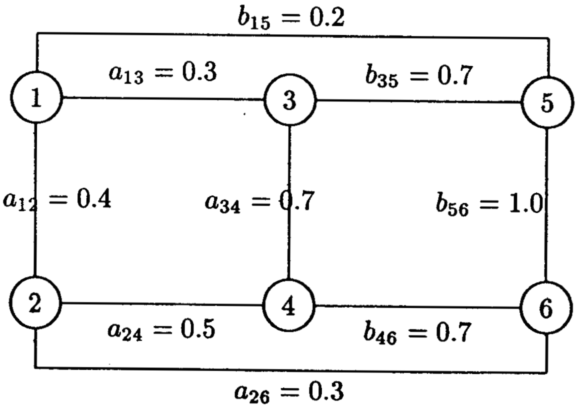

図 1: 2 評価者 6 項目の一対比較デザイングラフ

対数誤差の 2 乗和最小化問題として, ウェイトベクトル $\mathbf{u}$ とパラメータベクトル $\mathbf{p}$ の推定問題を以下に定式化する.

目的関数　$S=\sum(\log e_{ij}(k))^2 \rightarrow$最小化　(2)

制約条件　$\log e_{ij}(k)=$
$\log a_{ij}(k)-\alpha(k)(\log u_i-\log u_j)$　(3)
$(i,j)\in E$

本例題においては, 対数誤差二乗和 S は次式で与えられる.

$$
\begin{aligned}
S=\ & (\dot{a}_{12}-\alpha(\dot{u}_1-\dot{u}_2))^2+(\dot{a}_{13}-\alpha(\dot{u}_1-\dot{u}_3))^2\\
&+(\dot{a}_{24}-\alpha(\dot{u}_2-\dot{u}_4))^2+(\dot{a}_{26}-\alpha(\dot{u}_2-\dot{u}_6))^2\\
&+(\dot{a}_{34}-\alpha(\dot{u}_3-\dot{u}_4))^2+(\dot{b}_{15}-\beta(\dot{u}_1-\dot{u}_5))^2\\
&+(\dot{b}_{35}-\beta(\dot{u}_3-\dot{u}_5))^2+(\dot{b}_{46}-\beta(\dot{u}_4-\dot{u}_6))^2\\
&+(\dot{b}_{56}-\beta(\dot{u}_5-\dot{u}_6))^2 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

ここで, $\dot{u}$ などは $\log u$ を表現する.

4　例題の求解

対数二乗和 S は $\dot{u}$ と $\mathbf{p^T}=(\alpha,\beta)$ の関数であり, 従って, $S=S(\dot{\mathbf{u}},\mathbf{p})$ の $\mathbf{u}$ による最小化と $\mathbf{p}$ による最小化を交互に繰り返し (すなわち, $\frac{\partial S}{\partial \dot{\mathbf{u}}}=\mathbf{0}$ と $\frac{\partial S}{\partial \mathbf{p}}=\mathbf{0}$ を交互に解きながら)S の最小化を求める. 本例題においては, 2 つの連立方程式は次式で与えられる.

$\frac{\partial S}{\partial \dot{\mathbf{u}}}=\mathbf{0}$

$$(X^TX)\dot{\mathbf{u}}=X^T\dot{\mathbf{a}} \qquad (5)$$

但し, X と $\dot{\mathbf{a}}$ は表 1 で与えられる.

表 1: X と $\dot{\mathbf{a}}$ のデータ表

$\dot{\mathbf{a}}$	$\dot{\mathbf{u}}_1$	$\dot{\mathbf{u}}_2$	$\dot{\mathbf{u}}_3$	$\dot{\mathbf{u}}_4$	$\dot{\mathbf{u}}_5$	$\dot{\mathbf{u}}_6$
$\dot{a}_{12}$	α	$-\alpha$	0	0	0	0
$\dot{a}_{13}$	α	0	α	0	0	0
$\dot{a}_{24}$	0	α	0	$-\alpha$	0	0
$\dot{a}_{26}$	0	α	0	0	0	$-\alpha$
$\dot{a}_{34}$	0	0	α	$-\alpha$	0	0
$\dot{b}_{15}$	β	0	0	0	$-\beta$	0
$\dot{b}_{35}$	0	0	β	0	$-\beta$	0
$\dot{b}_{46}$	0	0	0	β	0	$-\beta$
$\dot{b}_{56}$	0	0	0	0	β	$-\beta$
0	1	1	1	1	1	1

図 2 に横軸に反復回数 ((5),(6),(7) 式の適用を 1 回とする) をとり, 縦軸にパラメータ値 α,β を示すが, 反復回数=18 付近で, 次の値に収束している.

$$u^T=(0.0435,0.0976,0.1418,0.1896,0.2493,0.2779) \qquad (8)$$

$$\mathbf{p^T}=(\alpha,\beta)=(\mathbf{1.086338},\mathbf{0.893046}) \qquad (9)$$

$$\mathbf{S=0.048674} \qquad (10)$$

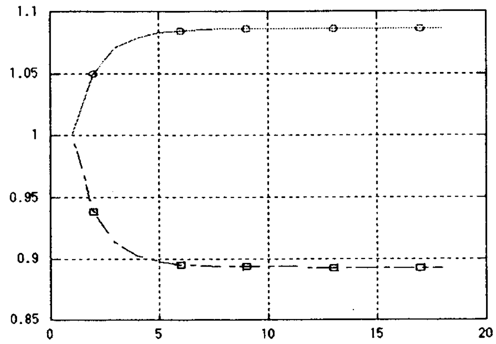

図 2: α, β のデータ

5　おわりに

複数評価者不完全一対比較情報下におけるウェイト推定法を提案した. 4 章の例題では, 評価者 1($\alpha\simeq 1.086$) は若干敏感であり, 評価者 2($\beta\simeq 0.893$) は若干鈍感と考えられる. なお, 本計算では, 初期値を $\mathbf{p^T}=(\mathbf{1.0},\mathbf{1.0})$ としており, 収束解 $\mathbf{p^T}=(\mathbf{1.086},\mathbf{0.893})$ は通常の状況 $\mathbf{p^T}=(\mathbf{1.0},\mathbf{1.0})$ を初期値としたという意味で, 最も妥当な解ではと予想される. なお, 初期値を $\mathbf{p^T}=(\mathbf{0.5},\mathbf{0.5}),(\mathbf{1.5},\mathbf{1.5}),(\mathbf{0.5},\mathbf{1.5}),(\mathbf{1.5},\mathbf{0.5})$ とすると本例題では異なる収束解が得られた. 求解アルゴリズムの収束性, 局所解対策, デザイングラフの最適設計などは今後の課題である.

$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{p}}=\mathbf{0}$

$$\alpha=\frac{\dot{a}_{12}(\dot{u}_1-\dot{u}_2)^2+\dot{a}_{13}(\dot{u}_1-\dot{u}_3)^2+\dot{a}_{24}(\dot{u}_2-\dot{u}_4)^2+\dot{a}_{26}(\dot{u}_2-\dot{u}_6)^2+\dot{a}_{34}(\dot{u}_3-\dot{u}_4))^2}{(\dot{u}_1-\dot{u}_2)^2+(\dot{u}_1-\dot{u}_3)^2+(\dot{u}_2-\dot{u}_4)^2+(\dot{u}_2-\dot{u}_6)^2+(\dot{u}_3-\dot{u}_4))^2} \qquad (6)$$

$$\beta=\frac{\dot{b}_{15}(\dot{u}_1-\dot{u}_5)^2+\dot{b}_{35}(\dot{u}_3-\dot{u}_5)^2+\dot{b}_{46}(\dot{u}_4-\dot{u}_6)^2+\dot{b}_{56}(\dot{u}_5-\dot{u}_6)^2}{(\dot{u}_1-\dot{u}_5)^2+(\dot{u}_3-\dot{u}_5)^2+(\dot{u}_4-\dot{u}_6)^2+(\dot{u}_5-\dot{u}_6)^2} \qquad (7)$$