2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

効果的な一対比較情報収集法に関する研究
——2重ループの場合——

02502580 日本大学 * 播磨 砂登美 HARIMA Satomi
02602260 日本大学 三宅 千香子 MIYAKE Chikako
01205220 日本大学 篠原 正明 SHINOHARA Masaaki
01300450 筑波大学(名誉教授) 高橋 磐郎 TAKAHASHI Iwaro

1 はじめに

自然科学的過程で測定しきれない感性，意思を含むような問題をAHPによって解決したい。AHPの計算過程の前段階では目標から見た評価基準ならびに各評価基準から見た代替案の重要度ウェイトを推定する。項目間の一対比較データをもとにn個の項目のウェイト推定を行う場合に、必ずしも${}_nC_2$個の完全情報が得られるとは限らないし、完全情報を入手する必要もないと考えられる。情報量が多ければ測定手間はかかるが、推定ウェイトの統計的信頼度は高まる。本論文では、どの程度の情報を使えばどの程度の推定値の統計的信頼度が得られるかを、正規グラフの例(二重ループ)について計算結果を示す。

2 誤差解析の理論

比較対象となる項目(要素)を節点とした節点集合Vを持つ一対比較デザイングラフGを考える。ここで枝$(i,j)\in E$の時、要素iとjの一対比較が行われる。枝(i,j)について、比率モデルと乗法形誤差モデルを仮定すれば一対比較測定値a_{ij}と要素i,jの未知の真のウェイトu_i,u_j，乗法形誤差e_{ij}の間に次式が成立する。

$$a_{ij}=\frac{u_i}{u_j}e_{ij}\quad (i,j)\in E \tag{1}$$

ここで、a_{ij}は測定データ、u_i,u_j,e_{ij}は未知数である。

(1)式両辺の対数をとると、

$$\log a_{ij}=\log u_i-\log u_j+\log e_{ij} \tag{2}$$

(2)式を行列表現すると(3)式を得る。

$$\boldsymbol{a}=X\boldsymbol{u}+\boldsymbol{e} \tag{3}$$

但し、$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{e}$は$\log a_{ij}$，$loge_{ij}$を$(i,j)\in E$について並べた(重複可)大きさ$|E|=m$の列ベクトル，$\boldsymbol{u}$は$\log u_k \quad (k\in V)$を要素とする大きさ$|V|=n$の列ベクトル，$\boldsymbol{X}$は$m\times n$の大きさの枝－点向き付け接続行列である。対数二乗誤差和$z=\sum(\log e_{ij})^2=\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{e}$の最小化は、次式(4)を$\boldsymbol{u}$で偏微分して零と置くことにより(5)式，(6)式が対数最小二乗法(LLS)の解として得られる。

$$z=\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{a}^T-\boldsymbol{u}^TX^T)(\boldsymbol{a}-X\boldsymbol{u}) \tag{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{u}}=2X^TX\boldsymbol{u}-2X^T\boldsymbol{a}=0 \tag{5}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}}=(X^TX)^{-1}X^T\boldsymbol{a} \tag{6}$$

ここで、誤差$\log e_{ij}$ $((i,j)\in E)$が平均0，分散σ^2を持つ独立な確率変数とするならば、変数u_i,u_jの推定値$\hat{u}_i,\hat{u}_j$((6)式の要素)の共分散$V(\hat{u}_i,\hat{u}_j)$について最小二乗法の基本定理の1つとして次式が成立する。

$$V(\hat{u}_i,\hat{u}_j)=S(i,j)\sigma^2 \tag{7}$$

但し、$S(i,j)$は$M=X^TX$の逆行列，$M^{-1}=(X^TX)^{-1}$の(i,j)要素である。すなわち、推定値$\hat{u}_i$の分散$V[\hat{u}_i]$は次式で評価できる。

$$V(\hat{u}_i)=S(i,i)\sigma^2 \tag{8}$$

以上をまとめると，最小二乗推定ベクトル$\hat{\boldsymbol{u}}$がどの程度統計的に信頼度が持てるか、すなわち、$\hat{\boldsymbol{u}}$の変動具合、典型的指標としてのその分散を考えれば、分散$V[\hat{u}_i]$は誤差ベクトル$\boldsymbol{e}$に依存するわけだが、その各対数誤差要素$\log e_{ij}$の分散σ^2に正比例し、さらに、一対比較測定値$\boldsymbol{a}$の大小には依存せず、どのように一対比較が行われるかを表現する接続行列Xに依存すると言える。

3 正規グラフのデザインの場合

対象とするデザイングラフが度数dの正規グラフである場合は、Aをグラフの隣接行列とす

ると、次式 (9)，(10) が成立する。但し、I は単位行列，J は全要素 1 の行列である。

$$M = dI + J - A \tag{9}$$

$$S(i,i) = s \tag{10}$$

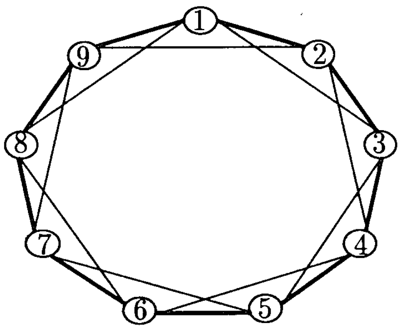

図 1: 閉路 Q(9,1)(太線) と閉路 Q(9,2) を重畳して得られる正規グラフ $Q_1 + Q_2$

4　数値計算例

対象とするデザイングラフが正規グラフで、さらに、その正規グラフが図 1 に示すように、すべての節点を通過する閉路の重畳で表現できる場合を考える。

節点数=n で、枝 (1,2)，(2,3)，・・・，(n-1,n)，(n,1) から構成される閉路を Q(n,1) と表現する。節点を 1 つスキップして、枝 (1,3)，(3,5)，・・・ から構成される閉路 (集合) を Q(n,2) と表現する。

同様に、枝 (1,1+k(mod n))，(1+k(mod n),1+2k(mod n))，・・・ から構成される閉路 (集合) を Q(n,k) と表現する。又、$Q(n,k_1) + Q(n,k_2)$ で 2 つの閉路 (集合) が重畳したグラフを表現する (図 1 参照)。

表 1 に，$Q(n,1)$，$Q(n,1)+Q(n,2)$，$Q(n,1)+Q(n,3)$，等々のデザイングラフに対する s 値 (式 (8)，(10) 参照) を節点数 n =5 ～ 25 について示す。比較対象の項目数 n が大きくなるほど、s 値は増加している。また、$a = (n-1)/2$ とおくと $Q_1 + Q_a$ 付近を境に対称な表となる。対称軸を太線で示す。さらに、その中で最も精度のよいものは、$Q_1 + Q_{\frac{a}{2}}$ 付近である場合が多い。n 一定値で最小を与えるケースを*印示す。

5　おわりに

デザイングラフが二重ループで表される不完全一対比較の場合について、どのような一対比較情報を収集すればウェイト推定値の統計的信頼度が高まるかを数値計算実験により示した。今後の研究課題としては、項目数の n の増加、様々な正規グラフの考慮、k 重枝の取り扱い、一般のデザイングラフの分析等がある。

参考文献

[1] Keyi Wang and 高橋磐郎, "How to select paired comparisons in AHP of incomplete information-strongly regular graph design", JORS of Japan, 41, 2, 311-328(1998).

[2] Satomi Harima, Chikako Miyake, Masaaki Shinohara,"Statistical Reliability Assessment of Priority Weight for Double-Loop Regular Graphs" to be presented at INFOR2002.(Edinburgh,UK)

表 1. 閉路重畳正規グラフの s 値

—	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8	Q_9	Q_{10}	Q_{11}	Q_{12}	Q_{13}	Q_{14}
5	0.2400	*0.2000	*0.2000	0.2400										
6	0.2708	*0.2083	0.2264	*0.2083	0.2708									
7	0.3061	*0.2182	*0.2182	*0.2182	*0.2182	0.3061								
8	0.3437	0.2314	*0.2188	0.2601	*0.2188	0.2314	0.3437							
9	0.3827	0.2455	*0.2306	0.2455	0.2455	*0.2306	0.2455	0.3827						
10	0.4225	0.2605	0.2358	*0.2350	0.2984	*0.2350	0.2358	0.2605	0.4225					
11	0.4628	0.2759	*0.2418	*0.2418	0.2759	0.2759	*0.2418	*0.2418	0.2759	0.4628				
12	0.5035	0.2917	*0.2505	0.2563	0.2535	0.3384	0.2535	0.2563	*0.2505	0.2917	0.5035			
13	0.5444	0.3077	0.2581	0.2581	*0.2521	0.3077	0.3077	*0.2521	0.2581	0.2581	0.3077	0.5444		
14	0.5855	0.3238	0.2656	*0.2581	0.2656	0.2730	0.3792	0.2730	0.2656	*0.2581	0.2656	0.3238	0.5855	
15	0.6267	0.3401	0.2739	*0.2630	0.2832	0.2638	0.3401	0.3401	0.2638	0.2832	*0.2630	0.2739	0.3401	0.6267
16	0.6680	0.3565	0.2819	0.2705	0.2819	*0.2700	0.2930	0.4204	0.2930	*0.2700	0.2819	0.2705	0.2819	0.3565
17	0.7093	0.3729	0.2900	*0.2750	0.2761	0.2900	0.2761	0.3729	0.3729	0.2761	0.2900	0.2761	*0.2750	0.2900
18	0.7508	0.3894	0.2982	0.2784	*0.2765	0.3106	*0.2765	0.3133	0.4618	0.3133	*0.2765	0.3106	*0.2765	0.2784
19	0.7922	0.4059	0.3064	*0.2832	*0.2832	0.3064	0.2886	0.2886	0.4059	0.4059	0.2886	0.2886	0.3064	*0.2832
20	0.8337	0.4224	0.3147	0.2887	0.2910	0.2948	0.3147	*0.2852	0.3338	0.5034	0.3338	*0.2852	0.3147	0.2948
21	0.8753	0.4390	0.3229	0.2936	0.2936	0.2900	0.3382	*0.2899	0.3011	0.4390	0.4390	0.3011	*0.2899	0.3382
22	0.9168	0.4556	0.3312	0.2981	0.2939	*0.2935	0.3312	0.3074	0.2939	0.3543	0.5450	0.3543	0.2939	0.3074
23	0.9584	0.4722	0.3395	0.3029	*0.2958	0.3029	0.3138	0.3395	*0.2958	0.3138	0.4722	0.4722	0.3138	*0.2958
24	1.0000	0.4888	0.3478	0.3080	*0.3000	0.3118	0.3036	0.3660	0.3036	0.3020	0.3750	0.5867	0.3750	0.3020
25	1.0416	0.5054	0.3561	0.3129	0.3048	0.3129	*0.3029	0.3561	0.3265	0.3036	0.3265	0.5054	0.5054	0.3265

$Q(n,1) + Q(n,k)$ を Q_k と表記