

カッティングストック問題に対する 線形計画法に基づく局所探索法の提案

02004704 京都大学大学院情報学研究科 梅谷 俊治 UMETANI Shunji
01704164 京都大学大学院情報学研究科 柳浦 睦憲 YAGIURA Mutsunori
01001374 京都大学大学院情報学研究科 茨木 俊秀 IBARAKI Toshihide

1 まえがき

カッティングストック問題は、様々な形状や大きさの製品を顧客の注文に応じて定型の母材から切出し、かつ母材の材料費や切出しにかかる工程費を最小化する計画を求める問題である。1本の母材から切出す製品の組合せはカッティングパターン(以下、パターンと略す)と呼ばれる。過去の素材産業では材料費が総費用の大半を占めていたため、使用母材の本数を最小化する定式化に基づく手法が多く提案されてきた。しかし、近年、材料費の低下に伴いパターン変更に伴う段取り替え作業回数の削減が重要視されている。そこで、本研究では、あらかじめ与えられた段取り替え数(パターン数)の元で、使用母材の本数を最小化するカッティングストック問題に対して、線形計画法に基づく局所探索法を提案する。

2 カッティングストック問題の定式化

入力として、母材長 L 、製品種類数 m 、各製品の長さ l_1, l_2, \dots, l_m 、及び注文数 d_1, d_2, \dots, d_m と、使用可能なパターン数 n が与えられる。パターン p_j が製品 i を切出す数を a_{ij} 、パターン p_j の適用回数を x_j とすると、使用可能パターン数 n の元で使用母材の本数を最小化するカッティングストック問題は以下の通りに定式化できる。

$$(CSP) \min f(\Pi, X) = \sum_{p_j \in \Pi} x_j \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{p_j \in \Pi} a_{ij} x_j - r_i = d_i, \text{ for } i \in M$$

$$\Pi \subseteq S$$

$$|\Pi| = n$$

$$x_j \in \mathbf{Z}_+, \text{ for } p_j \in \Pi$$

$$r_i \in \mathbf{Z}_+, \text{ for } i \in M.$$

ここで、 M は製品の集合 $\{1, 2, \dots, m\}$ 、 Π は使用パターンの集合 $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 、 X は使用パターン集合 Π の各パターンの適用回数 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ を表す。また、 r_i は各製品の余剰数を、 S は以下の式(2)

を満たす任意のパターンから成る集合を表す。

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} l_i \leq L. \quad (2)$$

3 局所探索法

使用パターン集合 Π を1パターン入替え近傍に基づく局所探索法で求める。ここで、初期使用パターン集合はビンパッキング問題に対するFirst-Fit法を適用して得られる。式(2)に示される実行可能なパターンの数は製品数 m の指数オーダーとなるため、これら全てを暫定使用パターン集合に対する入替えパターン候補として評価することは困難である。そこで、本研究では4節に示すパターン生成アルゴリズムを適用し、暫定使用パターン集合に対して $O(n^2)$ 個の入替えパターン候補を生成する。

また、各パターンの適用回数 X は、以下の式(3)の整数計画問題を解く事で得られる。

$$(IP(\Pi)) \min f(X) = \sum_{j=1}^n x_j \quad (3)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - r_i = d_i, \text{ for } i \in M$$

$$x_j \in \mathbf{Z}_+, \text{ for } j \in N$$

$$r_i \in \mathbf{Z}_+, \text{ for } i \in M.$$

本研究では、式(3)の各変数 x_j の整数制約を緩和した線形計画問題 $LP(\Pi)$ を解き、得られた実数最適解 \bar{X} を丸めた整数近似解 \hat{X} を各パターンの適用回数とする。

4 パターン生成

パターン集合 Π は、式(4)に示す1パターン入替え近傍 $N(\Pi)$ を用いた局所探索法 LS を適用して得る。

$$N(\Pi) = \{\Pi \cup \{p(i', j')\} \setminus \{p_j\} \mid j' \in N, i' \in M'(\Pi)\}, \quad (4)$$

$p(i', j')$ はパターン生成アルゴリズムで出力されるパターンの集合であり、 N は各使用パターン p_j の添

字から成る集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ を表す. $M'(\Pi)$ を以下の式 (5) で定義する.

$$M'(\Pi) = \{i \mid y_i > 0, i \in M\}. \quad (5)$$

ここで, y_i は線形計画問題 LP(Π) の双対問題 DLP(Π) (式 (6)) の最適解である.

$$\begin{aligned} \text{(DLP}(\Pi)\text{)} \quad \max \quad & \sum_{i=1}^m d_i y_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq 1, \text{ for } p_j \in \Pi \\ & y_i \geq 0, \text{ for } i \in M. \end{aligned} \quad (6)$$

パターン生成アルゴリズムは暫定解 (Π, X) 及び (i', j') を入力とし, パターン $p_{j'}$ $\in \Pi$ を変更して得られるパターン候補 $p(i', j')$ を出力する. まず, パターン $p_{j'}$ 内の製品 i' を 1 増やし, 式 (2) を満たすならば終了. そうでなければ i' 以外の製品を y_i/l_i の値で整列し, y_i/l_i の小さい製品から式 (2) まで順に 1 ずつ減らす. 以下の式 (7) を満たすならば終了.

$$L - \sum_{i \in M} a_{ij} l_i < \min_{i \in M} l_i \quad (7)$$

そうでなければ, y_i/l_i の大きい順に式 (2) の制約のもとで製品 i を加える.

5 線形計画法

提案する局所探索法では, 近傍解 $\Pi' \in N(\Pi)$ を評価するたびに線形計画問題 LP(Π') を解く必要があるため, 単体法をそのまま適用したのでは, LP(Π') を解くたびに単体表を作り直す必要があり計算効率が悪い. そこで, 本研究では暫定解 Π における各パターンの適用回数 X を計算する際に得られた単体表 T から, 近傍解 Π' に対する単体表 T' を生成し, これに対して線形計画法の一種である十文字法 [4] を適用して, 近傍解 Π' の各パターンの適用回数 X' を計算する.

暫定解 Π における単体表の基底変数に対する列集合を B , コスト係数 c_B , 非基底変数に対する列集合を N , コスト係数 c_N とする. 新たな単体表 T' は, 4 節で生成したパターン候補 $p(i', j')$ に B^{-1} を掛けて得られる列 $\tilde{p}(i', j') = B^{-1}p(i', j')$ を N に加えた後, これとパターン $p_{j'}$ に対応する列 $\tilde{p}_{j'}$ を入替えるピボット操作を適用することで得られる. この時, 得られた単体表 T' は相補性条件のいずれも保証しない. しかし, 任意の単体表から最適解に収束する性質を持つ十文字法 [4] を適用する事で, 近傍解 Π' に対する単体表 T' が得られる.

6 数値実験

問題生成アルゴリズム CUTGEN [2] により様々な問題例を作成した. CUTGEN は入力パラメータに

L, ν_1, ν_2, \bar{d} を持ち, L は母材長, $[\nu_1, \nu_2]$ は母材に対する各製品長の割合, \bar{d} は各製品の注文数の平均を表す. 本研究では $L = 1000$, $[\nu_1, \nu_2] = [0.01, 0.8]$ にとした.

まず, 5 節で提案した十文字法を用いた手法の評価を行った. 局所探索法 1 実行の間に, 線形計画問題 LP(Π) を解くのに要したピボット操作の平均回数を, 改訂単体法と提案する十文字法を用いた方法で比較を行った (表 1).

表 1: LP(Π) を解くのに要した平均ピボット回数

class	m	d	改訂単体法	十文字法
1	10	10	11.99	1.27
2	10	100	14.14	0.88
3	20	10	19.46	0.88
4	20	100	31.48	1.19
5	40	10	52.16	0.84
6	40	100	73.23	1.64

表 1 に示す様に, 改訂単体法は製品数にほぼ比例したピボット回数を要しているのに比較して, 提案手法ではほとんどの問題例において 1-2 回のピボット操作で最適解に収束している.

7 まとめ

本研究では, 段取り替え数が制限されたカッティングストック問題に対して, 線計画法に基づく局所探索法を提案した. 局所探索法では, 線形計画問題の双対問題から得られる情報を利用して, 近傍解のパターン生成を行った. また, 線形計画問題を効率良く解くために暫定解の単体表を利用して, 近傍解の各パターンの適用回数の計算を行った. 本問題に対する他手法との性能比較の詳細および考察については, 当日発表する予定である.

参考文献

- [1] H. Foerster and G. Wäscher, Pattern reduction in one-dimensional cutting stock problems, *International Journal of Production Research*, vol.38, pp.1657-1676, 2000.
- [2] T. Gau and G. Wäscher, CUTGEN1: a problem generator for the standard one-dimensional cutting stock problem, *European Journal of Operational Research*, vol.84, pp.572-579, 1995.
- [3] R.E. Haessler, Controlling cutting pattern changes in one-dimensional trim problems, *Operations Research*, vol.23, pp.483-493, 1975.
- [4] S. Zionts, The criss-cross method for solving linear programming problems, *Management Science*, vol.15, pp.426-445, 1969.