2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

秘書問題と駐車場問題におけるリスク最小化

01007155　高知大学　大坪　義夫　OHTSUBO Yoshio

1．序

閾値確率（リスク）を評価関数としてもつ離散時間確率過程上の最適停止問題を考える．最初に，古典的な結果に基づいて，最適値と最適時間についての基本的な特徴付けを行う．ところが，共に閾値に依存していることに注意をしなければばならない．一般に閾値確率は閾値に関して分布関数ではないが，最適値は分布関数になることがわかる．これらの結果を古典的な秘書問題と駐車場問題に適用し，最適値と最適時間を求め，その結果について考察する．

2．問題の定式化

$(\Omega,\mathcal{F},P)$ を確率空間，$(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ を $\mathcal{F}$ の非減少な部分 σ-集合族，$X=(X_n)$ を $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の確率過程とし，$(\mathcal{F}_n)$ に適合しているものとする．また，$P(\sup_n X_n^+<\infty)=1$ と仮定する．ただし，$x^+=\max(0,x)$．各 $n\geq 1$ に対して，Γ_n^N (resp. Γ_n) を $n\leq\tau\leq N$ (resp. $n\leq\tau<\infty$) a.s. をみたす $(\mathcal{F}_n)$–停止時間 τ の全体とする．ただし，$n\leq N$．

ここで考える最適停止問題は，閾値確率 $F_0(r;\tau)=P(X_\tau\leq r)=E[I_{(X_\tau\leq r)}]$ を $\tau\in\Gamma_0^N$ （または，Γ_0）に関して最小にすることである．ここで，r は閾値と呼ばれ実数であり，I_A は集合 A における定義関数である．$Y_n(r)=I_{(X_n\leq r)}$ とおいて，一般に $F_n(r;\tau)=E[Y_\tau(r)|\mathcal{F}_n]$ と定義する．このとき，有限期間と無限期間の最適値過程 $(V_n^N(r))$, $(V_n(r))$ を

$$V_n^N(r)=\operatorname*{ess\,inf}_{\tau\in\Gamma_n^N}F_n(r;\tau),\quad V_n(r)=\operatorname*{ess\,inf}_{\tau\in\Gamma_n}F_n(r;\tau),$$

と定める．また，最適値列 $(v_n^N(r))$ and $(v_n(r))$ を

$$v_n^N(r)=\inf_{\tau\in\Gamma_n^N}E[Y_\tau(r)],\quad v_n(r)=\inf_{\tau\in\Gamma_n}E[Y_\tau(r)],$$

と定義する．さらに，$n\geq 1,\varepsilon\geq 0$ に対して，$v_n^N(r)\geq E[Y_{\tau_\varepsilon}(r)]-\varepsilon$ (resp. $v_n(r)\geq E[Y_{\tau_\varepsilon}(r)]-\varepsilon$) のとき，$\Gamma_n^N$ (resp. Γ_n) での停止時間 τ_ε を (n,r) において ε–最適という．

3．基本的な結果

古典的な最適停止問題から，固定した閾値 r に対して，次の結果を得る．

命題3．1． r を任意の実数とする．このとき，$\lim_{N\to\infty}V_n^N(r)=V_n(r)$ a.s.. さらに，各 n,N $(1\leq n\leq N)$ に対して，$v_n^N(r)=E[V_n^N(r)]$, $v_n(r)=E[V_n(r)]$.

命題3．2． r を任意の実数とする．このとき，有限期間最適値過程 $(V_n^N(r))$ は次をみたす：

$$V_N^N(r)=Y_N(r),\quad V_n^N(r)=\min(Y_n(r),E[V_{n+1}^N(r)|\mathcal{F}_n]),\ 1\leq n\leq N-1.$$

また，停止時間 $\sigma_N^*(r)=\inf\{1\leq k\leq N|V_k^N(r)=Y_k(r)\}$ は $(1,r)$ において Γ_1^N で 0–最適である．ただし，$\inf\phi=N$．

命題3．3． r を任意の実数とする．このとき，無限期間最適値過程 $(V_n(r))$ は次をみたす：

$$V_n(r)=\min(Y_n(r),E[V_{n+1}(r)|\mathcal{F}_n]).$$

また，各 $\varepsilon>0$ に対して，$\tau_n^\varepsilon(r)=\inf\{k\geq n|V_k(r)\geq Y_k(r)-\varepsilon\}$ は，(n,r) において Γ_n で ε–最適である．ここで，$\inf\phi=\infty$．さらに，$\tau_n^0(r)=\inf\{k\geq n|V_k(r)=Y_k(r)\}$ が a.s. に有限であるならば，$\tau_n^0(r)$ は (n,r) において Γ_n で 0–最適である．

次の結果は，0–最適時間が存在するための十分条件である．

定理3．1． r を任意の実数とし，$A_n(r)=\{X_n>r\}$ とおく．$P(\limsup_{n\to\infty}A_n(r))=1$ ならば，すべての n に対して，$\tau_n^0(r)$ は (n,r) において Γ_n で 0–最適である．

次の定理はこの節の重要な結果である．

定理3．2． 各 n, N $(1\le n\le N)$ に対して，$V_n(\cdot)$ と $V_n^N(\cdot)$ はともに R 上の分布関数である．また，$v_n(\cdot)$, $v_n^N(\cdot)$ もそうである．

4．秘書問題への適用

$A_1,A_2,\ldots,A_N$ を整数 $1,2,\ldots,N$ の順列を表す確率変数とし，これらは同様に確からしいとする．A_n は n 番目までに現れた候補者の絶対ランクを表し，Z_n を n 番目までに現れた候補者の相対ランクを表すとする．$\mathcal{F}_n=\sigma(Z_1,Z_2,\ldots,Z_n)$ として，確率過程 (X_n) を $X_n=P(A_n=1|\mathcal{F}_n)$, $n=1,2,\ldots,N$ と定める．そのとき，閾値確率 $P[X_\tau\le r|\mathcal{F}_n]$ に対する最適停止問題を考える．

定理4．1． 各 N に対して，最適値関数 $v_1^N(r)=E(V_1^N)$ は次のように表される：

$$v_1^N(r)=\sum_{k=1}^{N}(k-1)/N\cdot I_{[(k-1)/N,k/N)}(r)+I_{[1,\infty)}(r),$$

また，$\inf\phi=N$ として，最適停止時間は

$$\sigma_N^*(r)=\begin{cases}\inf\{k\le n\le N|Z_n=1\} & \text{if}\quad (k-1)/N\le r<k/N, k=1,\ldots,N\\ 1 & \text{otherwise}\end{cases}$$

注意4．1． 上の定理から，$N\to\infty$ のとき，$v_1^N(r)$ は $[0,1]$ 上の一様分布に収束する．

5．駐車場問題への適用

運転手は，1 をスタートして目的地 N に向かって運転し，駐車場を探している．駐車場は $1,2,\cdots,N,\cdots$ に位置している．Z_n を駐車場が空いていれば $Z_n=0$，そうでなければ $Z_n=1$ である確率変数とする．そのとき，$Z_1,Z_2,\cdots,Z_N,\cdots$ は独立同一分布に従い，$P(Z_n=1)=p=1-P(Z_n=0)$ とする．$q=1-p$ とおく．このとき，確率過程 (X_n) を

$$\begin{cases}X_n=(-M)\cdot I_{(Z_n=1)}+(n-N)\cdot I_{(Z_n=0)},\ 1\le n<N,\\ X_N=-1/q\cdot I_{(Z_N=1)},\end{cases}$$

とする．ここで，M は十分大きな実数とする．$\mathcal{F}_n=\sigma(Z_1,\ldots,Z_n)$ とする．このとき，閾値確率 $P[X_\tau\le r|\mathcal{F}_n]$ をもつ最適停止問題を考える．整数 m を次のように定める：$1-N>-1/q$ ならば $m=1$，そうでなければ m を $m-N-1\le -1/q<m-N$ をみたす整数とする．

定理5．1． 各 N に対して，最適値関数 $v_1^N(r)$ は次で表される：

$$v_1^N(r)=p^{N-m+1}\cdot I_{[-1/q,m-N)}(r)+\sum_{k=1}^{N-m}p^k\cdot I_{[-k,-k+1)}(r)+I_{[1,\infty)}(r),$$

ここで，$\sum_{k=1}^{0}\cdot=0$．また，$\inf\phi=N$ として，最適停止時間は

$$\sigma_N^*(r)=\begin{cases}\inf\{k\le n<N|Z_n=0\} & \text{if}\ \ k-N-1\le r<k-N\ (k=1,\ldots,N)\\ \inf\{1\le n<N|Z_n=0\} & \text{if}\ \ -M\le r<-N\\ 1 & \text{otherwise}\end{cases}$$

注意5．1． $v_1^N(r)$ は，$N\to\infty$ のとき幾何分布に収束する．すなわち，W をその分布に対応する確率変数とすると，$P(W=-n)=qp^n(n=0,1,\ldots)$ であり，$E[W]=-p/q$．

Reference [1].Chow, Y. S., Robbins, H. and Siegmund, D.(1971). *Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping.* [2].DeGroot, M. H.(1970). *Optimal Statistical Decisions.* [3].Ohtsubo, Y. and Toyonaga, K.(2002).JMAA(to appear). [4].White, D. J.(1993).JMAA, 173, 634–646.