

セルフテスト性をもつシステムの最適定期テスト方策

02602443 愛知工業大学大学院 *水谷聡志 MIZUTANI Satoshi
 01400043 愛知工業大学 中川覃夫 NAKAGAWA Toshio
 01012123 三菱重工業株式会社 伊藤弘道 ITO Kodo

1 はじめに

デジタル回路などのシステムにおいて、ある故障集合に属する任意の故障が存在するとき、少なくとも一つの符号入力に対して非符号語を出力するならば、そのシステムはセルフテスト性をもつといわれる [1]。すなわち、セルフテスト性をもつシステムは、その出力符号を検査することによりオンライン状態で故障を検出することができる。しかし、ある故障を検出する入力符号をもっていたとしても、その入力符号がまれにしか与えられない場合、その故障を即座に検出することはできない。そのため、高い信頼性を得るために定期的にテストパターンを入力するなどの処置を実行する必要がある [1]。

本研究では、このようなシステムを確率モデル化し、信頼性理論における点検方策を応用し、期待費用とを最小にする最適な定期テスト [2] の間隔時間を議論する。

2 モデル化

システムの故障分布は、有限な平均 $1/\lambda$ をもつ $F(t)$ に従うとする。セルフテスト性により、故障の発生から発見されるまでの時間は有限な平均 $1/\mu$ ($\mu > \lambda$) をもつ分布 $G(x)$ に従うとする。また定期テストを時刻 kT ($k = 1, 2, \dots$) に実行する。故障は発生した後、次の定期テストにより発見、またはセルフテスト性により発見されるとする。定期テストを一回実行することに要する費用を c_i とする。システムは故障が発生した後、発見されるまでの間に不正な出力をする可能性があるため、これに伴う損失を単位時間当り c_d とする。故障発見後にかかるシステムの取替費用を c_r とする (図 1)。

故障が発見されるまでを1サイクルとすると1サイクルの期待時間は

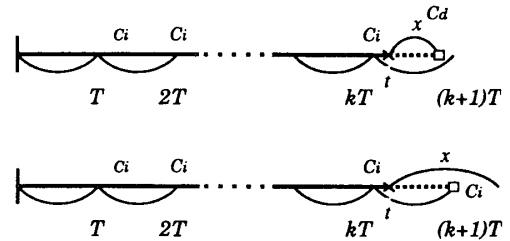


図 1: 定期テスト方策モデル

$$\begin{aligned}
 A(T) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} \left[\int_0^{(k+1)T-t} (t+x) dG(x) \right. \\
 &\quad \left. + (k+1)T \bar{G}((k+1)T-t) \right] dF(t) \\
 &= \frac{1}{\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T \left[\bar{F}(kT) - \bar{F}((k+1)T-x) \right] \bar{G}(x) dx
 \end{aligned} \tag{1}$$

であり、1サイクル当りの期待費用は

$$\begin{aligned}
 B(T) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} \left[\int_0^{(k+1)T-t} (c_i k + c_d x) dG(x) + \{c_i(k+1) \right. \\
 &\quad \left. + c_d((k+1)T-t)\} \bar{G}((k+1)T-t) \right] dF(t) + c_r \\
 &= c_i \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \bar{F}(kT) - \int_0^T \left[\bar{F}(kT) - \bar{F}((k+1)T-x) \right] dG(x) \right\} \\
 &\quad + c_d \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T \left[\bar{F}(kT) - \bar{F}((k+1)T-x) \right] \bar{G}(x) dx + c_r
 \end{aligned} \tag{2}$$

となる。

3 最適方策 1

$B(T)$ を最小にする最適な T^* を求める。

$$B(0) = \infty, \quad B(\infty) = \frac{c_d}{\mu} + c_r$$

であるから、 $B(T)$ を最小にする T^* が存在する。

とくに、 $\bar{F}(t) = e^{-\lambda t}$ のとき

$$B(T) = \frac{\left[c_i \left[1 - \int_0^T (1 - e^{-\lambda(T-x)}) dG(x) \right] + c_d \int_0^T (1 - e^{-\lambda(T-x)}) \bar{G}(x) dx \right]}{1 - e^{-\lambda T}} + c_r \quad (3)$$

である。 $B'(T) = 0$ とおくと

$$c_d \int_0^T (e^{\lambda x} - 1) \bar{G}(x) dx - c_i \int_0^T (e^{\lambda x} - 1) dG(x) = c_i \quad (4)$$

となる。 (4) 式の左辺を $Q(T)$ とおくと

$$\begin{aligned} Q(0) &= 0, \\ Q(\infty) &= c_d \int_0^\infty (e^{\lambda x} - 1) \bar{G}(x) dx - c_i \int_0^\infty (e^{\lambda x} - 1) dG(x), \\ Q'(T) &= (e^{\lambda T} - 1) \bar{G}(T) c_i \left[\frac{c_d}{c_i} - d(T) \right] \end{aligned}$$

である。ここで、 $d(t) \equiv g(t)/\bar{G}(t)$ 、 $\bar{G} \equiv 1 - G$ は、自己検査率であり、一般に、この率は時間とともに減少すると仮定する。すなわち、DFR とする。明らかに、 $d(T) \geq c_d/c_i$ の範囲では、 $Q(T)$ は減少し、 $d(T) < c_d/c_i$ の範囲では増加する。

とくに、 $\bar{G}(x) = e^{-\mu x}$ ($\mu > \lambda$) のとき、(4) 式は

$$\left[\frac{1 - e^{-(\mu-\lambda)T}}{\mu - \lambda} - \frac{1 - e^{-\mu T}}{\mu} \right] (c_d - \mu c_i) = c_i \quad (5)$$

となる。さらに、

$$L(T) \equiv \left[\frac{1 - e^{-(\mu-\lambda)T}}{\mu - \lambda} - \frac{1 - e^{-\mu T}}{\mu} \right]$$

とおくと、明らかに

$$L(0) = 0, \quad L(\infty) = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} > 0$$

$$L'(T) = e^{-\mu T} (e^{\lambda T} - 1) > 0$$

よって、 $L(T)$ は 0 からの単調増加関数である。

(5) 式の左辺を $Q_2(T)$ とおくと

$$Q_2(0) = 0, \quad Q_2(\infty) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} (c_d - \mu c_i)$$

である。

よって、次の最適方策を得る。

- (i) もし、 $\frac{\lambda}{\mu - \lambda} (c_d/\mu - c_i) > c_i$ ならば、(5) 式を満たす有限で唯一の T^* ($0 < T^* < \infty$) が存在する。
- (ii) もし、 $\frac{\lambda}{\mu - \lambda} (c_d/\mu - c_i) \leq c_i$ ならば、 $T^* = \infty$ である。

4 最適方策 2

$C(T)$ を単位時間当たりの期待費用とする。すなわち

$$\begin{aligned} C(T) &\equiv \frac{B(T)}{A(T)} \\ &= c_d + \frac{\left[c_i \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \bar{F}(kT) - \int_0^T \bar{F}(kT) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \bar{F}((k+1)T - x) \right\} dG(x) \right]}{\left[\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T \left[\bar{F}(kT) - \bar{F}((k+1)T - x) \right] \right. \\ &\quad \left. \times \bar{G}(x) dx + \frac{1}{\lambda} \right]} \end{aligned}$$

とおく。明らかに

$$C(0) = \infty, \quad C(\infty) = \frac{c_d/\mu + c_r}{1/\lambda + 1/\mu}$$

である。よって、 $C(T)$ を最小にする T_2^* ($0 < T_2^* \leq \infty$) が存在する。

とくに、 $\bar{F}(t) = e^{-\lambda t}$ のとき、

$$C(T) = c_d + \frac{\left[c_i \left[1 - \int_0^T (1 - e^{-\lambda(T-x)}) dG(x) \right] - (c_d/\lambda - c_r)(1 - e^{-\lambda T}) \right]}{\frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda T}) + \int_0^T (1 - e^{-\lambda(T-x)}) \bar{G}(x) dx} \quad (6)$$

である。 $C'(T) = 0$ とおくと

$$\begin{aligned} (c_d - \lambda c_r) \int_0^T (e^{\lambda x} - 1) \bar{G}(x) dx \\ - c_i \left\{ \int_0^T (e^{\lambda x} - 1) dG(x) + \int_0^T \lambda e^{\lambda x} \bar{G}(x) dx \right. \\ + \int_0^T \lambda e^{\lambda x} dG(x) \int_0^T (1 - e^{-\lambda(T-x)}) \bar{G}(x) dx \\ \left. - \int_0^T \lambda e^{\lambda x} \bar{G}(x) dx \int_0^T (1 - e^{-\lambda(T-x)}) dG(x) \right\} = c_i \quad (7) \end{aligned}$$

となる。上式の左辺を $Q_3(T)$ とすると、 $Q_3(0) = 0$ である。よって、 $Q_3(\infty) > c_i$ ならば、 $C(T)$ を最小にする (7) 式を満たす有限で最適な T^* が必ず存在する。

参考文献

- [1] 電子情報通信学会編，“フォールトトレラントシステム論”，電子情報通信学会，1990。
- [2] 三根久，河合一，“信頼性・保全性の数理”，朝倉書店，1982。