1つの本線がある平面上のトラヒックのための待ち行列モデル

東京理科大学　*水野 信也　MIZUNO Shinya
01602570　東京理科大学　宮沢 政清　MIYAZAWA Masakiyo

1　はじめに

本論文は平面上の有界な領域でランダムに発生するトラヒックについて考察する．この領域上には1つの本線と本線につながる線（支線と呼ぶことにする）がある。本論文での目的は、支線から本線への合流に対する混雑の度合いを評価することである。すなわち、支線上のユニットが本線に合流するときの待ち時間を計算する。以下のことを仮定する。領域上ではポアソン過程に従いユニットが発生し、それらは本線にたどり着くまで支線を一定速度で移動する。そして合流点においてスペースがあれば直ちに合流し、なければ合流場所でスペースができるまで待つ。このモデルの自然な場合として、本線上の合流地点は有限個に限られると仮定する。ユニットは本線上を一定の速さで移動すると仮定する。合流地点だけを観察することによりこのモデルを離散時間型モデルとみることができる。支線の本数をNとし有限合流点モデルと呼ぶ。ここでは定常状態を仮定して、待ちユニット個数の定常分布を計算する。これより平均待ち時間が得られる．また、支線の本数を増やしたときの極限値を計算し，近似値として有効であることがわかった。

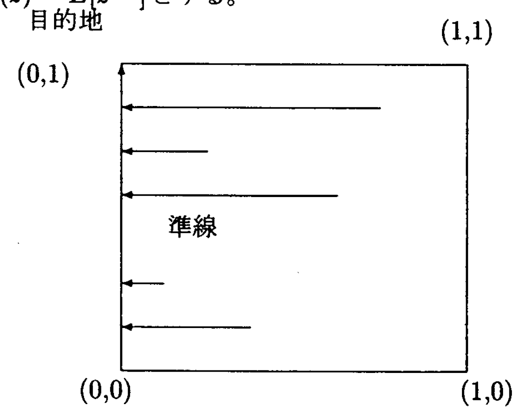
2　有限合流点モデル

上記のトラヒックモデルを数学的に表現する。このモデルでは、ある領域を用意し支線が配置されている。ここで領域の形や準線の配置を考えるのは、時間軸に対する変換を行うことに着目すれば本質的なことではない。ここでは$D=\{(x,y)|0\leq x,y\leq 1\}$を用意し、$D$上には本線が$(0,0)$から目的地$(0,1)$に走っている。そして本線に合流する支線が$N$個配置されている。支線の合流地点を原点に近いほうからレベル$1,2,\cdots,N$とする。D上での発生場所は任意の分布に従う。このモデルの基本的仮定は

1) 各レベルで発生したユニットは本線にスペースがあるときのみ合流できる。

2) 各レベルごとの移動時間は$\frac{1}{N}$とする。

3) $A_k(n)$を時刻$(\frac{n-1}{N},\frac{n}{N})$での$k$レベルの到着ユニット数とし、$A_k(1),A_k(2),\cdots$は独立で同一の分布に従う。$f_k(z)=E[z^{A_k}]$とする。



kレベルの時刻$\frac{n}{N}$の「直前」の人数を$X_k(n)$とする。これより各レベルの関係式は次のようになる。

$$X_k(n+1)=(X_k(n)-1(X_{k-1}(n-1)=0,\cdots,X_1(n-(k-1))=0))^+ + A_k(n+1). \quad (2.1)$$

$a^+=\max(0,a)$とする。また

- τ_k=kレベルの状態がひとつ下がるまでの時間
- T_k=最初のリターン時間 n すなわち $X_1(-k+1)=0,\cdots,X_k(0)=0$の時　$X_1(n-(k-1))=0,\cdots,X_k(n)=0$となる最小の$n\leq k$
- $x_k(z):=E[z^{X^{(k)}}]$,　$h_k(z)=E[z^{T_k}]$,
  $g_k(z)=E[z^{\tau_k}]$,　$f_k(z)=E[z^{A_k}]$

と定義する。また

$$E[A_1+A_2+\cdots+A_n]<1. \quad (*)$$

を仮定しておく。これらの定義より

$$g_k(z)=g_{k-1}(f_k(g_k(z))\cdot z). \quad |z|<1 \quad (2.2)$$

1レベルは$M/G/1$型待ち行列なので

$$x_1(z)=(1-E[A_1])\frac{(z-1)f_1(z)}{z-f_1(z)}. \quad (2.3)$$

今、2レベル以降は高いレベルの情報が必要となってくるのでマルコフ性をもっていない。k レベルにマルコフ性をもたせるために

- $R_k(n)=\min\ \{l \geq 0; X_k(n+l)=0\}$,
- $\sigma_k(i)=$ the i-th 時刻 n such that $R_{k-1}(n)=0$
- $Y_k(i)=X_k(\sigma_k(i)+1)$
- $S_k(i)=A_k(i+1)+A_k(i+2)\cdots+A_k(i+T_{k-1})$,
- $s_k(z)=E[z^{S_k}], y_k(z)=E[z^{Y_k}]$

これより,次の関係式が成り立つ。

$$Y_k(i+1)=(Y_k(i)-1)^+ + S_k(n). \quad (2.4)$$

定理 2.1 条件 *(*)* のもとで、X_k の積率母関数は、

$$E[e^{\theta X_k}] = \frac{E[e^{\theta Y_k}]+(e^\theta-1)P(Y_k=0)}{e^\theta E[T_{k-1}]} \times \frac{1-g_{k-1}(f_k(\theta))}{1-f_k(\theta)}. \quad (2.5)$$

$\alpha_k=E[A_1]+E[A_2]+\cdots+E[A_k]$,
$\beta_k=V[A_1]+V[A_2]+\cdots+V[A_k]$. とあらわすと、各モーメントは

$$E[T_k]=\frac{1}{1-\alpha_k}, \quad V[T_k]=\frac{\beta_k}{(1-\alpha_k)^3}$$

$$E[S_k]=\frac{E[A_k]}{1-\alpha_{k-1}},$$

$$V[S_k]=\frac{V[A_k](1-\alpha_{k-1})^2+E^2[A_k]\beta_{k-1}}{(1-\alpha_{k-1})^3},$$

$$E[Y_k]=\frac{V[S_k]}{1-E[S_k]}, \quad P(Y_k=0)=1-E[S_k].$$

3 待ち時間の極限計算

各ユニットは率 λ のポアソン過程にしたがって発生し、a_k を発生地点をあらわす密度関数とする。ここでは各レベルの到着はポアソン分布に従うので

$$E[A_k]=V[A_k]=\frac{\lambda}{N}b_k.$$

ここで $b_k=\int_0^1 a_k(x)dx$ である。よって $\alpha_k=\frac{k}{N}b_k\lambda$、$\beta_k=\frac{k}{N}b_k\lambda$ となる。合流地点の数 $N\to\infty$ とすると、次の式が導かれる。

$$E[X_k]=\frac{\lambda}{2N}b(y)\frac{\lambda yb(y)(2-\lambda yb(y))}{(1-\lambda yb(y))^2}+o(\frac{1}{N}).$$

定理 3.1 各レベルでの待ち時間と、システムないでの総移動時間は次のようになる。

$$E[W|K=y]=\frac{\lambda yb(y)(2-\lambda yb(y))}{2(1-\lambda yb(y))^2}. \quad (3.6)$$

$$E[W]=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\lambda yb(y)(2-\lambda yb(y))}{(1-\lambda yb(y))^2}dy. \quad (3.7)$$

系 3.1 発生場所が一様な場合は

$$E[W|K=y]=\frac{\lambda y(2-\lambda y)}{2(1-\lambda y)^2}, \quad (3.8)$$

$$E[W]=\frac{\lambda}{2(1-\lambda)}. \quad (3.9)$$

これらの結果は数値計算により (2,5) 式の結果の近似値として利用できることがわかった。

参考文献

[1] P. Bremaud, *Markov Chains Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation and Queues*, Springer, 1998.

[2] A. Cobham, priority assignment in waiting line problems, operations research 2 70-76, 1954.

[3] H. Miura, Autumn meeting of the Operations Research Society of Japan, 64-65, 1997 (in Japanese).

[4] Y. Takahashi, Delay analysis of discrete-time priority queue, Queueing Systems 8 149-164, 1991.

[5] H. Takagi, Priority queues with batch Poisson arrivals, Operatins Research Letters 10 225-232, 1991.

[6] H. Takagi, *Queueing Analysis, Volume 2: Finite Systems*, North-Holland, 1993.