直列型生産システムにおける納期遅れおよび在庫コストを考慮した最適リリースタイム決定問題について

上智大学 *小野寺 武史 ONODERA Takeshi
01008610 上智大学 石塚 陽 ISHIZUKA Yo
01703040 東京都立大学 山下英明 YAMASHITA Hideaki

1 はじめに

効率的な生産システムの構築を目的とする種々の生産方式の提案，生産システムの設計問題の定式化と解法，生産スケジュール決定問題の解法，等が古くから盛んに研究されている．

本報告では，各工程での加工時間が確率的にばらつくような複数の工程からなる直列型生産システムにおいて，生産すべき製品およびその個数と製品それぞれの納期が与えられており，納期に遅れるとコスト（ペナルティー）が課せられるが，あまり早期に生産を開始すると製品を受け渡すまでの中間在庫費用（最終製品の在庫費用も含む）が増加してしまう，という状況を想定し，これらの納期遅れおよび中間在庫のコストの総和を最小にするような各工程での部品のリリースタイム (加工開始可能時刻) を決定する問題を考える．

文献 [1] では，同様の状況において納期遅れによるコストと中間在庫によるコストの合計を最小にするような，**各製品の入力工程での最適リリースタイム（生産開始可能時刻）**を求める問題を定式化し，サンプルパス最適化法による解法を提案している．ここでは，入力工程のリリースタイムだけではなく，納期遅れのコストおよび中間在庫によるコストの合計を最小にするような**各製品の各工程での最適リリースタイム（加工開始可能時刻）**を決定する問題を定式化し，サンプルパス最適化法による解法を示す．ただし，総期待コストは一般に非凸関数となるので，ここでは総期待コストの凸な上界を与える関数を最小化することにより，近似最適リリースタイムを決定する．簡単のために直列型生産システムについて述べるが，ここでの手法はネットワーク型システムへも容易に拡張できる．

2 モデルと定式化

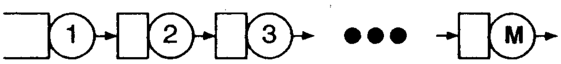

図 1: 直列型生産システム

図 1 のような M 工程からなる直列型生産システム (あるいは待ち行列システム) を考える．ここで，丸印は加工機械を，四角は工程間のバッファを表す．製品を製造するのに必要な部品や材料はすでに工程 1 の前のバッファ(原材料置場) に十分な量が確保されているものとし，工程 1 から順に工程 M まですべての工程で加工を受けて完成品となる．製造すべき製品は $j = 1, 2, \cdots, J$ の J 個あり，各工程ではこの順番で加工するものとし，追い越しはないものとする．製品 j の納期を $D_j, j = 1, 2, \cdots, J$ とする．部品 j(製品 j 用の部品 = 各行程工程で j 番目に加工される部品) の工程 i での加工時間 $S_{i,j}$ は独立で既知の分布に従う確率変数とする．

$r_{i,j}$ を工程 i における部品 j の**リリースタイム**とする．ここで，リリースタイムとは，その時刻になるまで (たとえ加工が可能であっても) 加工を開始しない，という時刻を表す．つまり，$C_{i,j}$ を工程 i からの部品 j の退去時刻とすれば

$$C_{i,j} = \max\{r_{i,j} + S_{i,j},\ C_{i-1,j} + S_{i,j},\ C_{i,j-1} + S_{i,j},\ C_{i+1,j-B_{i+1}}\} \quad (1)$$

となる．ただし，B_i は工程 i の前のバッファ容量 (工程それ自身も含める:故に $B_i \geq 1$) とする．

ここで，リリースタイムベクトルを $\boldsymbol{r} = (r_{i,j})$ として，納期遅れと中間在庫の費用を考慮した以下の目的関数を考える．

$$\begin{aligned} Z(\boldsymbol{r}) = \sum_{j=1}^{J} \Big[& Q_j\{\max(C_{M,j},\ D_j) - D_j\} \\ & + H_{1,j}\{C_{1,j} - \max(C_{1,j-1},\ r_{1,j})\} \\ & + \sum_{i=2}^{M-1} H_{i,j}(C_{i,j} - C_{i-1,j}) \\ & + H_{M,j}\{\max(C_{M,j},\ D_j) - C_{M-1,j}\}\Big] \quad (2) \end{aligned}$$

ここで，Q_j は製品 j の納期遅れ単位時間あたりのペナルティで，$H_{i,j}$ は部品 j の工程 i における単位時間あたりの在庫費用を表す．我々の目的はこの総費用の

期待値 $E[Z(\boldsymbol{r})]$ を最小にするような各部品の各工程におけるリリースタイムを決定することで，以下のように定式化される．

$$(\mathrm{P})\begin{cases}\min\ E[Z(\boldsymbol{r})]\\ \text{s.t. } r_{i,j+1}\ge r_{i,j},\ j=1,2,\cdots,J-1\\ \qquad r_{i,j}\ge 0,\ j=1,2,\cdots,J\\ \qquad\qquad i=1,2,\cdots,M\end{cases}$$

3 サンプルパス最適化

$E[Z(\boldsymbol{r})]$ はその厳密な値を求めることすら容易ではないので，ここでは，サンプルパス最適化 [2, 3, 4] のアプローチをとる．N 種類の加工時間 $S_{i,j}$ の実現値 $\overline{S}^{\ell}_{i,j}$, $\ell=1,2,\cdots,N$ を生成しておき，リリースタイム $\boldsymbol{r}$ が与えられたとき，それらのもとでの退去時刻 $\overline{C}^{\ell}_{i,j}$, $\ell=1,2,\cdots,N$ を，$S_{i,j}=\overline{S}^{\ell}_{i,j}$ とおいた (1) によって生成する．さらに (2) の $C_{i,j}$ を $\overline{C}_{i,j}$ で置き換えて $Z(\boldsymbol{r})$ の実現値

$$\begin{aligned}\overline{Z}^{\ell}(\boldsymbol{r})=\sum_{j=1}^{J}\Big[&Q_j\{\max(\overline{C}^{\ell}_{M,j},\ D_j)-D_j\}\\ &+H_{1,j}\{\overline{C}^{\ell}_{1,j}-\max(\overline{C}^{\ell}_{1,j-1},\ r_{1,j})\}\\ &+\sum_{i=2}^{M-1}H_{i,j}(\overline{C}^{\ell}_{i,j}-\overline{C}^{\ell}_{i-1,j})\\ &+H_{M,j}\{\max(\overline{C}^{\ell}_{M,j},\ D_j)-\overline{C}^{\ell}_{M-1,j}\}\Big]\end{aligned}$$

を求め，$E[Z(\boldsymbol{r})]$ を以下の $\overline{Z}(\boldsymbol{r})$ で近似する．

$$\overline{Z}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{N}\sum_{\ell=1}^{N}\overline{Z}^{\ell}(\boldsymbol{r})$$

$\overline{C}^{\ell}_{i,j}$ は $\boldsymbol{r}$ に関して区分的に線形な凸関数であるので，$\overline{Z}^{\ell}(\boldsymbol{r})$ および $\overline{Z}(\boldsymbol{r})$ は区分的に線形な凸関数の差の関数となり，その最小化は DC (Difference Convex) 最適化であり容易ではない．

そこで，完成品に近づくにつれ単位時間あたりの在庫費用は減少することはないという仮定:

(仮定) $H_{i+1,j}\ge H_{i,j},\ i=1,2,\cdots,M-1$

のもとで，$\overline{Z}^{\ell}(\boldsymbol{r})$ の上界を与える凸関数

$$\begin{aligned}\overline{Z}^{\ell}_{U}(\boldsymbol{r})=\sum_{j=1}^{J}\Big[&(Q_j+H_{M,j})\max(\overline{C}^{\ell}_{M,j},\ D_j)-Q_jD_j\\ &-H_{1,j}r_{1,j}-\sum_{i=1}^{M-1}(H_{i+1,j}-H_{i,j})(r_{i,j}+\overline{S}^{\ell}_{i,j})\Big]\end{aligned}$$

を考え，問題 (P) を以下の凸計画問題で近似する．

$$(\overline{\mathrm{P}}_U)\begin{cases}\min\ \overline{Z}_U(\boldsymbol{r})=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{\ell=1}^{N}\overline{Z}^{\ell}_U(\boldsymbol{r})\\ \text{s.t. } r_{i,j+1}\ge r_{i,j},\ j=1,2,\cdots,J-1\\ \qquad r_{i,j}\ge 0,\ j=1,2,\cdots,J\\ \qquad\qquad i=1,2,\cdots,M\end{cases}$$

$\overline{Z}_U(\boldsymbol{r})$ は区分的に線形な凸関数であるから，問題 $(\overline{\mathrm{P}}_U)$ は LP に変換できる．具体的には例えば

$$(\overline{\mathrm{P}}_U)\begin{cases}\displaystyle\min_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{\alpha}}\ \sum_{\ell=1}^{N}\sum_{j=1}^{J}\Big\{(Q_j+H_{M,j})\alpha^{\ell}_j-H_{1,j}r_{1,j}\\ \qquad\displaystyle-\sum_{i=1}^{M-1}(H_{i+1,j}-H_{i,j})(r_{i,j}+\overline{S}^{\ell}_{i,j})\Big\}\\ \text{s.t. } \overline{C}^{\ell}_{M,j}\le\alpha^{\ell}_j,\ j=1,\cdots,J,\ \ell=1,\cdots,N\\ \qquad D_j\le\alpha^{\ell}_j,\ j=1,\cdots,J,\ \ell=1,\cdots,N\\ \qquad r_{i,j+1}\ge r_{i,j},\ j=1,\cdots,J-1\\ \qquad r_{i,j}\ge 0,\ j=1,\cdots,J\\ \qquad\qquad i=1,\cdots,M\end{cases}$$

となる．ただし，$\overline{C}^{\ell}_{M,j}$ は $S_{i,j}=\overline{S}^{\ell}_{i,j}$ とおいた (1) で決まる $\boldsymbol{r}$ に関する区分的に線形な凸関数であるから，通常この問題は膨大な数の制約条件を持った LP となる．したがって，ここでは「緩和法」あるいは「列生成法」で徐々に制約条件を付け加えながら繰り返し LP を解き最適解に至るというアプローチをとる．

4 数値例

具体的な数値例は講演時に示す．

参考文献

[1] T. Homem-de-Mello, A. Shapiro and M.L. Spearman, "Finding optimal material release times using simulation-based optimization," Management Science, Vol.45, No.1, (1999).

[2] E.L. Plambeck, B.-R. Fu, S.M. Robinson and R. Suri, "Sample-path optimization of convex stochastic performance functions," Mathematical Programming, 75, pp.137-176, (1996).

[3] A. Shaphiro, "Simulation-based optimization — convergence analysis and statistical inference," Commun. Statist. — Stochastic Models, Vol.12, No.3, pp.425-454, (1996).

[4] S.M. Robinson, "Analysis of sample-path optimization," Mathematics of Operations Research, Vol.21, No.3, (1996).