

改良型 AHP (D-AHP) による合理的意思決定と実験的評価

01307154 大阪大学 田地 宏一 TAJI Kouichi
申請中 大阪大学 *鈴木 淳介 SUZUKI Junsuke
01307784 三菱電機 高橋 理 TAKAHASHI Satoru
01303394 大阪大学 田村 坦之 TAMURA Hiroyuki

1. はじめに

Analytic Hierarchy Process (以下 AHP) [1] は、意思決定過程を階層構造の抽出、一対比較による重要度の決定、総合重要度の統合という3つのステップとする階層型意思決定法である。AHP は実施が容易であり、さまざまな分野で実際に利用されている意思決定手法である。しかし最近、E. Triantphyllou [2] は AHP は不合理な順位を導くということを報告している。本論文では、この問題をとりあげ、完全に整合している理想的な状況でも、従来の AHP は不合理な順位を導くのにに対し、田村ら [3] による改良型 AHP である D-AHP は不合理な順位を導かないことを示す。また、実際の意思決定の場面においては、完全に整合していることは稀であることを考慮して、実際の場面に即した評価を数値実験により行う。

2. 不合理な順位

ここでは、不合理な順位について説明する。また、完全に整合している状況でも従来の AHP は不合理な順位を導くことを数値例によって示す。

AHP は通常すべての代替案を一斉に評価することで選好の順位付けを行う。一方、代替案のそれぞれの二項関係を AHP により評価したとき、推移律が成り立っていれば選好の順位をつけることができる。ところが、二項関係に推移律が成り立つ状況でも、一斉に評価した場合、二項関係から得られる順位と異なる順位を導くことがある。ここでは、それを不合理な順位とよび、それがおこる例を以下に示す。

Example : 不合理な順位を導く例

この例では、3つの評価基準 C_1, C_2, C_3 のもとで、3つの代替案 A_1, A_2, A_3 を評価するものとする。また評価基準の重要度は、それぞれ $4/22, 9/22, 9/22$ とする。これを AHP を用いてすべての代替案を一斉に評価した結果を表 1 に示す。各一対比較は完全に整合しているものとする。この結果より各代替案の選好関係は $A_3 \succ A_2 \succ A_1$ となることが分かる。同じ例について二項関係を AHP により評価したものを表 2, 3, 4 に示す。

この結果より $A_1 \prec A_2, A_1 \prec A_3, A_2 \succ A_3$ という関係が得られる。この時、選好関係に推移律が成り立っているため、代替案の選好関係は $A_2 \succ A_3 \succ A_1$

表 1: 一斉に評価した結果

	$C_1(4/22)$	$C_2(9/22)$	$C_3(9/22)$	重要度
A_1	9/18	5/15	2/15	0.283
A_2	1/18	8/15	5/15	0.354
A_3	8/18	2/15	8/15	0.363

表 2: A_1 と A_2 の評価結果

	$C_1(4/22)$	$C_2(9/22)$	$C_3(9/22)$	重要度
A_1	9/10	5/13	2/7	0.44
A_2	1/10	8/13	5/7	0.56

表 3: A_1 と A_3 の評価結果

	$C_1(4/22)$	$C_2(9/22)$	$C_3(9/22)$	重要度
A_1	9/17	5/7	1/5	0.47
A_3	8/17	2/7	4/5	0.53

表 4: A_2 と A_3 の評価結果

	$C_1(4/22)$	$C_2(9/22)$	$C_3(9/22)$	重要度
A_2	1/9	4/5	5/13	0.505
A_3	8/9	1/5	8/13	0.495

と求めることができる。この結果は代替案を一斉に評価した結果とは異なっている。このように従来型 AHP では完全に整合している場合で、推移律が成り立っていても不合理な順位を導き得ることがわかる。

3. D-AHP

D-AHP とは、希求水準を仮想的な代替案として代替案集合に加えて一対比較を行い、一対比較行列の主固有ベクトルを希求水準が1になるように正規化するように改良を加えたものである。従来の AHP では、この重要度の算出を和が1になるように正規化することで行っている。ここでは一対比較が完全に整合している理想的な場合、D-AHP によれば不合理な順位を導かないことを示す。

いま、意思決定問題の各要素を以下のように定義する。評価基準: $C_j (j = 1, \dots, n)$, 評価基準の重要度: $w_j (j = 1, \dots, n)$, 代替案: $A_i (i = 1, \dots, m)$, C_j のもとでの A_i の評価値: a_{ij} , C_j のもとでの希求水準 (AL) の評価値: a_{0j} とする。ここで代替案を一斉に

D-AHPにより評価した場合、代替案 A_k の重要度は

$$\sum_{j=1}^n w_j \frac{a_{kj}}{a_{0j}} \quad (1)$$

となる。また代替案 A_k と A_l の2つだけを D-AHP で評価する場合も、完全に整合している場合は、 A_k の重要度は (1) 式と同じになる。これがあらゆる2つの代替案間について成り立つので、一斉に評価した場合と同じ選好順位が得られる。したがって、完全に整合している場合には、不合理な順位を導かないことになる。

一方、従来の AHP では重要度の和を1に正規化するため、すべての代替案を一斉に評価した場合、代替案 A_k の重要度は

$$\sum_{j=1}^n w_j \frac{a_{kj}}{\sum_{i=1}^m a_{ij}} \quad (2)$$

となる。また A_k と A_l の2つだけを AHP で評価した場合 A_k の重要度は、

$$\sum_{j=1}^n w_j \frac{a_{kj}}{a_{kj} + a_{lj}} \quad (3)$$

となる。(2) 式と (3) 式は一致せず、不合理な順位を導き得るということになる。

4. 実験の評価

ここでは、まず CI 値の分布を求め、つぎに不合理な順位を導く頻度を評価した。

4.1. CI 値の分布

通常、一対比較の整合性は一対比較行列の大きさを n 、最大固有値を λ_{\max} とすると、次式 (4) に示す整合性指標 (CI 値) により判定する。

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} \quad (4)$$

一対比較の整合が完全に取れているとき λ_{\max} は n となり、 $CI = 0$ となる。Saaty [1] は $CI \leq 0.1$ ならば整合が取れていると見なしてよいとしている。

まずはじめに、一つの一対比較行列について、 CI 値の分布を計算する。一対比較値のデータとして用いる値は $\{1/7, 1/5, 1/3, 1, 3, 5, 7\}$ の線形スケールとする。表5はこれらの一対比較値から導出した CI 値の分布である。表5をみると、完全に整合している場合 ($CI = 0$) は極めて稀であり、また整合している ($CI \leq 0.1$) とみなせる一対比較も非常に少ないことがわかる。

表 5: CI 値の分布

行列サイズ	総数	$CI \leq 0.1$	$CI = 0$
3	343	121	19
4	117649	6547	43

4.2. 不合理な順位を導く頻度

次に実際の場面での評価として整合性が取れていると見なしてよいとされている $CI \leq 0.1$ の範囲で、どの程度の頻度で不合理な順位を導くのか数値実験により求めた。結果を表6に示す。実験では3つの代替案を3つの評価基準のもとで評価した場合を考えた。比較した手法は、従来型の AHP, Multiplicative AHP (M-AHP), D-AHP の三つの手法である。M-AHP は総合重要度の統合を乗法で行う AHP であり、完全に整合している場合には不合理な順位を導かないとされている [2]。表6を見ると、D-AHP では不合理な

表 6: 不合理な順位を導く頻度

	AHP	M-AHP	D-AHP
頻度	43.47 %	39.52 %	13.54 %

順位を導く頻度が AHP, M-AHP と比べてかなり低くなっていることがわかる。このことより実際の場合でも D-AHP は、より合理的な意思決定が行えることがわかる。

5. おわりに

本論文では整合性が完全に取れている場合には D-AHP を用いると不合理な順位を導かないことを示した。また実際の場面での評価として数値実験により評価を行った結果、D-AHP は従来の AHP よりも合理的な意思決定ができることがわかった。

参考文献

- [1] T.L. Saaty: "The Analytic Hierarchy Process," RWS Publications, 1990.
- [2] E. Triantphyllou: "Two New Cases of Rank Reversal when the AHP and Some of its Additive Variants are Used that do not Occur with Multiplicative AHP," *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, Vol. 10, pp. 11-25, 2001.
- [3] 田村坦之, 高橋理, 鳩野逸生, 馬野元秀: "階層化意思決定法 (AHP) の記述的モデルの提案と選考順位逆転現象の整合的解釈," *Journal of the Operation Research Society of Japan*, Vol. 41, No. 2, pp. 214-227, 1998.