2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

サーティの整合度0.1と寄与率

01104400 法政大学 加藤 豊 KATO Yutaka
01007500 慶応義塾大学 ＊小澤 正典 OZAWA Masanori

1. 誤差行列とその特異値

一対比較行列を $A=(a_{ij})$ としたとき，固有値法で推定したウェイトを w_i とするときの誤差行列 $B=(b_{ij})$ を，つぎのように定義する．

$$b_{ij}=a_{ij}\frac{w_j}{w_i}$$

この行列の列和は，w_i が A の固有ベクトルとなるので，すべて一定値 $(\lambda_{\max})$ となる．また，この行列 B の最大固有値は，$\lambda_{\max}$ でその固有ベクトルはその要素がすべて同じ値となるベクトルである．

サーティの整合度の妥当性を見るために，その誤差行列における特異値を利用して調べることにした．この誤差行列において，整合性がある場合にはその特異値は n になり他の特異値は0となるが，整合性がない場合には，その特異値の最大が行列 A の最大固有値 $\lambda_{\max}$ より大きくなり，また，他の特異値が0でなくなる．すべての特異値の2乗和は，行列の各要素の2乗和(フロベニウス・ノルム)を計算することにより求めることができる．そこで，行列の最大固有値と特異値の2乗和について考察する．

そのとき，誤差行列の推定誤差をみるために，誤差行列と $(\lambda/n)\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}$ の行列との差を調べる．

$$S_E=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(b_{ij}-\lambda/n\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2-\lambda^2$$

ここで，全誤差(要素の2乗和)との比を1から引いたものは，統計で言う寄与率になるが，それは，

$$R^2=1-S_E/S_T=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(b_{ij}-\lambda/n\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2}$$

$$=\frac{\lambda^2}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2}$$

となる．

したがって，最大固有値と特異値の2乗和の比はAHPのモデルにおける寄与率と見なしてよい．

2. 上界と下界

サーティの整合度 δ が与えられたものとして，その場合の寄与率の変動を調べるために，その値の上下界を調べる．誤差行列 B は，固有値法であるとその行和は最大固有値 $\lambda_{\max}$ で一定となっている．そこで，この場合における行列 B のフロベニウス・ノルムの上下限を計算すればよい．なお，ここでは，一対比較行列はreciprocal性（逆数性）を持つものと仮定すれば，行列 B も逆数性を持つことになる．

いま，行和は $\lambda=(n-1)\delta+n$ で与えられるので，寄与率の上限は，つぎの問題を解くことにより得られる．

$$\min_{b_{ij}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}b_{ij}=\lambda,\quad \text{for } i=1,\ldots,n$$

ここで，逆数性を仮定すると非線型問題となるが，λ は与えられたものであるから，制約条件を緩和して

$$\min_{b_{ij}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2,\quad \text{s.t.}\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}=n\lambda$$

として書くことができる．その解は $b_{ji}=1/b_{ij}$ であることより，

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2\geq n\left\{1+(n-1)\left(\bar{x}+1/\bar{x}\right)/2\right\}$$

となる．ここで，$\bar{x}$ はつぎの方程式の解である．

$$(n-1)x/2+(n-1)/2x+1=\lambda$$

いま n が奇数のとき，この $\bar{x}$ で b_{ij} を

$1\leq i<(n-1)/2+1$ の場合：

$$b_{ij}=\begin{cases}\bar{x}, & j=i+1,\ldots,i+(n-1)/2\\ 1/\bar{x}, & \text{その他}\end{cases}$$

$(n-1)/2+1 \leq i$ の場合：

$$b_{ij} = \begin{cases} 1/\bar{x}, & j = i-(n-1)/2, \ldots, i-1 \\ \bar{x}, & \text{その他} \end{cases}$$

(ここで，$b_{ii} = 1$ である) とすれば，そのときの値が先の下限値となるので，これから寄与率の上限値が分かる．なお，n が偶数のときは上界値となる．

ここで，寄与率の下界を求めるには，上限を求める式の最大を求めればよいが，逆数性を仮定すると極値が多数存在するので，その最適な解を見つけることは難しい．そこで，この値の上界のみを計算する．

このときに緩和した問題における最小値 L は，

$$L = n^2 - 2 + \bar{x}^2 + 1/\bar{x}^2$$

となる．ここで，$\bar{x}$ はつぎの方程式の解，

$$\bar{x} + 1/\bar{x} + n^2 - 2 = n\lambda$$

となる．よって，寄与率は，$R^2 \geq \lambda^2/L$ となる．

3. シミュレーション

いま，寄与率がどのように分布しているのかを調べるためにシミュレーションを行った．なお，シミュレーションにおいては，一対比較行列を

$$a_{ij} = \delta_{ij} u_i / u_j$$

で生成する．ここで，u_i は0.1から1.0の一様乱数であり，δ_{ij} は対数正規分布を使用した．これから固有値法で得られるウェイトを使用して誤差行列を生成し，その整合度と寄与率を計算した．

ここでは，一対比較行列の誤差が対数正規分布に従う場合について，分散を変化させながら10000回シミュレーションした結果について図1,2に示す．図の横軸がサーティの整合度で，縦軸が寄与率を示す．

4. 寄与率の分布

いま，この b_{ij} の2乗和がどのようになるか調べるために，各 b_{ij} 要素が $N(\mu, \sigma^2)$ に従うと仮定する．このとき，行和が λ となることを利用すれば，

$$E\left[b_{ij}^2\right] = \left(\frac{n-2}{n-1}\sigma^2 + \frac{(\lambda-1)^2}{(n-1)^2}\right)$$

となる．また，$\sum_{i,j} b_{ij}^2$ の分布は，非心 χ^2 分布となる．

なお，先のシミュレーションにおいて，サーティの整合度が (0.10〜0.11) となる場合の寄与率の値の分布を図3に示した．

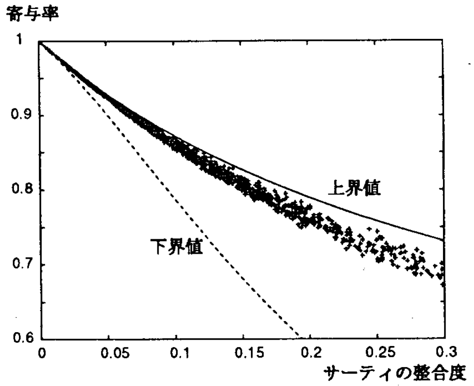

図1：項目数5における整合度と寄与率

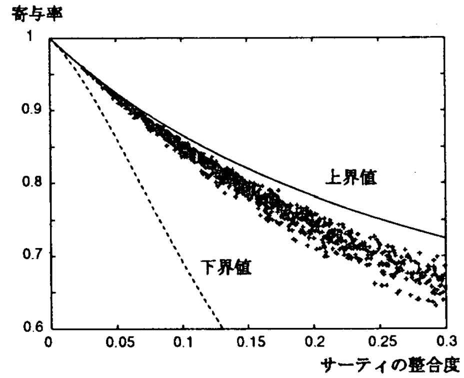

図2：項目数7における整合度と寄与率

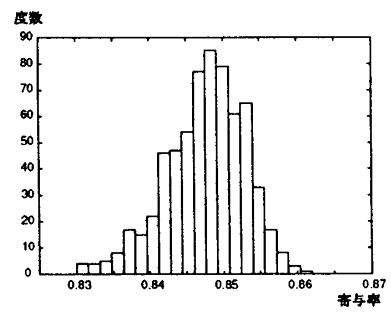

図3：項目数7における寄与率の分布

5. まとめ

サーティの整合度が0.15であることは，ほぼ寄与率で言えば，80%であり，0.1であるならば寄与率は85%である．また，その寄与率の下界値でも，70%はある．また，その分布は，対数正規分布ならば，ばらつく幅は小さい．

参考文献

[1] T.L. Saaty, "The Analytic Hierarchy Process", McGraw-Hill, 1980.

[2] 加藤豊，小澤正典，"行列ノルムによる一対比較行列からのウェイト推定"，日本OR学会度春季研究発表会 アブストラクト集，2002