2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

信頼領域法を用いた逐次二次計画法の大域的収束性

01308410　(株) 数理システム　*檀 寛成　DAN Hiroshige
01701240　(株) 数理システム　山下 浩　YAMASHITA Hiroshi

1　序論

本発表では次の最適化問題を考える．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(x),\ x \in \Re^n \\ \text{subject to} & g_j(x) = 0\ (j \in J_E) \\ & g_j(x) \geq 0\ (j \in J_I) \end{array} \tag{1}$$

ただし，$J_E \cap J_I = \emptyset$ とする．本発表では，(1) が大規模な場合にも適用可能なアルゴリズムを考察する．アルゴリズムに対する要求として，大域的収束をし，かつ局所的に速い収束をする可能性を持つ解法を考える．

アルゴリズムのフレームワークとして逐次二次計画法を採用し，部分問題が大規模になり得ることを考慮して，2 階導関数を使用する信頼領域法の反復を行う．このような方法は過去にいくつか提案されているが [1, 2]，基本的な困難は，信頼領域制約条件を付加した二次計画部分問題の制約条件が許容点を持たない可能性が少なくないことである．このような状況を回避するために過去に提案されたアルゴリズムは，どれも極めて複雑である．また，部分問題として非凸二次計画問題を解かなくてはいけないという問題点もある．

本発表では，このような困難が起こらない簡便なアルゴリズムを提案する．部分問題としては凸二次計画問題と線形方程式系を各反復ごとに解くだけで良い．この方法は，主双対内点法のアルゴリズム [4] において提案されたアイディアを応用したものである．

2　準備

(1) に対するラグランジュ関数を

$$L(x,y) = f(x) - \sum_{j\in J_E} y_j g_j(x) - \sum_{j \in J_I} y_j g_j(x)$$

とする．ここで，y_j は $g_j(x)$ に対するラグランジュ乗数を表す．すると，(1) に対する KKT 条件は

$$\begin{cases} \nabla_x L(x,y) = 0 \\ g_j(x) = 0\ (j \in J_E) \\ y_j g_j(x) = 0,\ y_j \geq 0,\ g_j(x) \geq 0\ (j \in J_I) \end{cases} \tag{2}$$

と表される．

次に，(1) に対するメリット関数を次のように定める．

$$F(x) = f(x) + \rho\Big(\sum_{j\in J_E} |g_j(x)| + \sum_{j\in J_I} |\min\{0, g_j(x)\}|\Big) \tag{3}$$

ここで，ρ は正の値を取るペナルティパラメータである．

(3) を $d \in \Re^n$ 方向へ一次近似した関数 F_l は次のように表すことができる．

$$F_l(x;d) = f(x) + \nabla f(x)^T d + \rho\Big(\sum_{j\in J_E} |g_j(x) + \nabla g_j(x)^T d| + \sum_{j\in J_I} |\min\{0, g_j(x) + \nabla g_j(x)^T d\}|\Big)$$

また，(3) を，目的関数部分について二次近似，制約条件部分について一次近似した関数 F_q は

$$F_q(x;d) = F_l(x;d) + \frac{1}{2} d^T G d$$

となる．ここで，行列 G は，アルゴリズム中に出てくる G_k に対応している．さらに，

$$\begin{aligned} \Delta F(x;d) &= F(x+d) - F(x) \\ \Delta F_l(x;d) &= F_l(x;d) - F(x) \\ \Delta F_q(x;d) &= F_q(x;d) - F(x) \end{aligned}$$

とする．

次の二次計画問題の解を Δx_{SD_k} とする：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \frac{1}{2}\Delta x^T D_k \Delta x + \nabla f(x_k)^T \Delta x,\ \Delta x \in \Re^n \\ \text{subject to} & g_j(x_k) + \nabla g_j(x_k)^T \Delta x = 0\ (j \in J_E) \\ & g_j(x_k) + \nabla g_j(x_k)^T \Delta x \geq 0\ (j \in J_I) \end{array} \tag{4}$$

ここで，D_k は要素が正の値の対角行列とする．(4) において，active な制約の添字の集合を J_{A_k} とする．すなわち，

$$J_{A_k} := \{ j \in J_E \cup J_I \mid g_j(x_k) + \nabla g_j(x_k)^T \Delta x_{SD_k} = 0\}$$

である．更に，次の二次計画問題の解を Δx_{N_k} とする：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \frac{1}{2}\Delta x^T G_k \Delta x + \nabla f(x_k)^T \Delta x,\ \Delta x \in \Re^n \\ \text{subject to} & g_j(x_k) + \nabla g_j(x_k)^T \Delta x = 0\ (j \in J_{A_k}) \end{array} \tag{5}$$

(5) において行列 G_k は $\nabla_x^2 L(x_k, y_k)$ とするが，もし，後で挙げる条件 (6) が成立していない場合には，(6) を満たすように G_k に要素が正の値の対角行列を加えるものとする．なお，(5) を解くには，線形方程式系を解くだけでよいことに注意する．

3　アルゴリズム

本稿で提案する信頼領域法を用いる逐次二次計画法のアルゴリズムは次のとおりである．

アルゴリズム TRSQP

Step 0. 初期点 $x_0 \in \Re^n$ と，対称行列 $G_0 \in \Re^{n\times n}$ を定める．また，パラメータ $\rho > 0, M > 0, \delta_0 > 0$ を選ぶ．$k = 0$ とする．

Step 1. (4) と (5) を解き，$\Delta x_{SD_k}, \Delta x_{N_k}$ とそれぞれの問題におけるラグランジュ乗数 $y_{SD_{k+1}}, y_{N_{k+1}}$ を求める．ただし，$y_{N_{k+1}j} = 0\ (j \notin J_{A_k})$ とする．もし，

$$\|\Delta x_{N_k}\| \leq M\|\Delta x_{SD_k}\| \tag{6}$$

が満たされない場合は，(6) を満たすように G_k を変更する．

Step 2. もし $(x_k, y_{N_{k+1}})$ が (2) を満たしていれば計算終了．さもなくば Step 3 へ.

Step 3. 次の条件を満たすような $s_k \in \Re^n$ を求める．

$$\|s_k\| \leq \delta_k \tag{7}$$

$$\|s_k\| \leq M\|\Delta x_{SD_k}\| \tag{8}$$

$$\Delta F_q(x_k; s_k) \leq \frac{1}{2}\Delta F_q(x_k; \alpha^*(x_k, \Delta x_{SD_k})\Delta x_{SD_k}) \tag{9}$$

ここで，$\alpha^*(x_k, d)$ は次のように定められる．

$$\alpha^*(x_k, d) = \arg\min_{\alpha}\{F_q(x; \alpha d) \mid \alpha \in (0,1],\ \|\alpha d\| \leq \delta_k\} \tag{10}$$

Step 4. δ_{k+1} を次のようにして定める．

$$\begin{array}{lcl} \Delta F(x_k; s_k) > \frac{1}{4}\Delta F_q(x_k; s_k) & \Rightarrow & \delta_{k+1} = \frac{1}{2}\delta_k \\ \Delta F(x_k; s_k) \leq \frac{3}{4}\Delta F_q(x_k; s_k) & \Rightarrow & \delta_{k+1} = 2\delta_k \\ \text{それ以外} & \Rightarrow & \delta_{k+1} = \delta_k \end{array}$$

Step 5. もし $\Delta F(x_k; s_k) \leq 0$ であれば $x_{k+1} = x_k + s_k$ とする．さもなくば $x_{k+1} = x_k$ とする．$k := k+1$ とし Step 1 へ．∎

Step 3 での s_k の定め方には，例えば次のような方法がある：Δx_{SD_k} と Δx_{N_k} の凸結合

$$\bar{s}_k(\nu_k) := \nu_k \Delta x_{SD_k} + (1-\nu_k)\Delta x_{N_k},\ \nu_k \in [0,1]$$

を考える．このとき，$\alpha^*(x_k, \bar{s}_k(\nu_k))\bar{s}_k(\nu_k)$ が (7), (8), (9) を満たしているかどうかを調べる．このとき，$\bar{s}_k(1)$ が (7), (8), (9) を満たしていることは明らかである．また，$\bar{s}_k(0)$ は，解の十分近くでは（ある条件の下で）通常の逐次二次計画法での探索方向と同じ方向となる．従って，実装の際には，まず $\nu_k = 0$ を試し，(7), (8), (9) が満たされるまで ν_k を 0.1 ずつ増やしていくなどの方法が考えられる．

4 大域的収束性

本発表では，以下のことを仮定する．

仮定 1 (1) $f, g_j\ (j \in J_E \cup J_I)$ は二回連続微分可能である．

(2) ペナルティパラメータ ρ は $\rho > \|y_{SD_{k+1}}\|_\infty\ (k = 0, 1, \ldots)$ を満たす．

(3) 初期点 x_0 におけるペナルティ関数のレベル集合 $\{x \in \Re^n \mid F(x) \leq F(x_0)\}$ は有界閉集合である．

(4) 行列 D_k は一様に正定値かつ有界，行列 G_k は一様に有界である．

(5) *(6), (8)* を満たすような定数 $M > 0$ が存在する．

これらの仮定の下で，次の補題が成立する．

補題 1 $\Delta F_l(x_k; \Delta x_{SD_k}) < 0$ が成立する．

補題 2 *(10)* で定まる $\alpha^*(x_k, \Delta x_{SD_k})$ は次式で表される．

$$\alpha^*(x_k, \Delta x_{SD_k}) = \min\left\{1, \frac{\delta_k}{\|\Delta x_{SD_k}\|}, -\frac{\Delta F_l(x; \Delta x_{SD_k})}{\max\{0, \Delta x_{SD_k}^T G_k \Delta x_{SD_k}\}}\right\}$$

ただし，括弧内の最後の要素は，分母が 0 であるときは ∞ と定める．

補題 3 $\liminf_{k\to\infty} \|\Delta x_{SD_k}\| = 0$ が成立する．

これらの補題を用いると，次の定理を示すことができる．

定理 1 $\{x_k\}$ をアルゴリズム *TRSQP* の生成する点列とする．このとき，$\{x_k\}$ のある集積点は *(1)* に対する *KKT* 条件 *(2)* を満たしている．

5 まとめと今後の課題

本発表では，従来の手法よりも簡潔で計算量も少ないことが期待できる，信頼領域法を用いた逐次二次計画法を提案した．今後の課題としては，本発表で提案したアルゴリズムを局所的に速い収束性を持つように改良することが挙げられる．

なお，数値実験の結果を当日発表する予定である．

参考文献

[1] R. H. Byrd, R. B. Schnabel and G. A. Schultz, A trust region algorithm for nonlinearly constrained optimization, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 24(1987), 1152-1170.

[2] M. Lalee, J. Nocedal and T. Plantenga, On the implementation of an algorithm for large-scale equality constrained optimization, *SIAM Journal on Optimization*, 8(1998), 682-706.

[3] H. Yamashita and H. Yabe, A nonmonotone SQP method with global and superlinear convergence properties, Technical report, Mathematical Systems, Inc., 1996 (Revised 1998).

[4] H. Yamashita, H. Yabe and T. Tanabe, A globally and superlinearly convergent primal-dual interior point trust region method for large scale constrained optimization, Technical report, Mathematical Systems, Inc., 1997 (Revised 1998).