

## マルコフ連鎖を用いたマーケット・メイキング機能に関する分析

0200 5420 日本銀行・京都大学大学院経済学研究科 内田 善彦

### 1. はじめに

1997~98年に観察された一連の市場の混乱では、マーケット・メーカーによる流動性提供メカニズムが弱まった結果、市場全体の流動性低下という形でストレスが増幅された可能性がある(BIS[1])。金融当局にとって、市場の安定性とマーケット・メイク機能の関係を分析することを通じて、頑強で効率的な市場のデザインを考察することは、重要な研究テーマとなっている。

市場の取引価格形成メカニズムについて、Duffie, Garleanu and Pedersen [2] (以下DGP)は簡明な構造の市場モデルを考案し、分析している。ただ、DGPのモデルは、マーケット・メーカーは存在しないか、存在してもマーケット・メーカーは在庫を持たない枠組みとなっている。本稿では、マーケット・メイク機能と取引価格決定メカニズムの関係をより詳細に考察できるよう、マーケット・メーカーが在庫を持つことができるようにDGPのモデルをマルコフ連鎖の枠組みで修正した。このモデルを使うことでマーケット・メーカーの行動と取引価格の形成メカニズムの関係をより詳細に考察することが可能となる。

### 2. モデル

市場で取引される証券は、配当を生む1種類の証券のみであるとし、この証券の配当過程  $X$  は適合であるとする。時刻  $t$  における配当を  $X_t$  と記述する。配当は時間に対し連続的に支払われるものとし、その期待増加率を  $c$  とおく。つまり、 $u > t$  のとき、 $E_t(X_u) = X_t e^{c(u-t)}$  である。

市場参加者数を  $M$  とおき、各参加者はリスク中立的であると仮定する。さらに、発行済み証券数

を  $S$  とし、参加者は1人あたり1枚の証券しか保有しないと仮定する。つまり、すべての参加者は、①証券1枚を保有しているか、②証券を保有していないか、のいずれかに分類される。

市場はリスク中立的であり、無リスク金利をゼロと仮定する。将来時点で発生するキャッシュフローの現在価値への割引は、時間選好を示す市場参加者の主観的割引金利 ( $r$ ) で行う。このとき  $r$  は  $r_l$  (低金利) と  $r_h$  (高金利) の2種類の値をとると仮定する ( $r = \{r_l, r_h\}$ )。

マーケット・メーカーとして振舞う  $I$  人 ( $I \leq S$ ) の参加者が存在すると仮定する。この  $I$  人を一体として1人のマーケット・メーカーが存在すると考える (つまり、マーケット・メーカーは市場に1人しか存在しない)。このとき、マーケット・メーカーは最大  $I$  枚の証券を在庫として保有することができる。マーケット・メーカーの主観的割引金利  $r_m$  は  $r_l < r_m < r_h$  と仮定する。

したがって、すべての市場参加者は、①主観的割引金利高+証券保有 ( $ho$ )、②主観的割引金利高+証券保有せず ( $hn$ )、③主観的割引金利低+証券保有 ( $lo$ )、④主観的割引金利低+証券保有せず ( $ln$ )、⑤マーケット・メーカーで証券保有 ( $mo$ )、⑥マーケット・メーカーで証券保有せず ( $mn$ )、のいずれかに分類できることになる。

マーケット・メーカーの在庫上限が  $I$  枚のとき、マーケット・メーカーが  $k$  枚の証券を在庫として保有すると、 $m_{mo}(t) = k$ 、 $m_{mn}(t) = I - k$  となる。このとき、

$$m_{ho}(t) + m_{hn}(t) + m_{lo}(t) + m_{ln}(t) = M$$

$$m_{ho}(t) + m_{lo}(t) + m_{mo}(t) = S$$

が成立している。 $r_l < r_m < r_h$  を仮定しているから、

証券の売買は、①タイプ  $ho$  (売り手) とタイプ  $ln$  (買い手) 間の取引 (相対取引と呼ぶ)、②タイプ  $ho$  (売り手) とタイプ  $mn$  (買い手) 間の取引 (ビッド取引と呼ぶ)、③タイプ  $mo$  (売り手) とタイプ  $ln$  (買い手) 間の取引 (アスク取引と呼ぶ) の3通りとなる。市場参加者の主観的割引が変更される間隔は指数分布に従うと仮定し、主観的割引金利が  $r_l$  から  $r_h$  へ変更される間隔は強度  $\lambda_u$  の指数分布に、 $r_h$  から  $r_l$  へ変更される間隔は強度  $\lambda_d$  の指数分布に各々従うとする。また、主観的割引金利は、各参加者で独立に変化すると仮定する。さらに、主観的割引金利過程と配当過程も独立であるとする。

相対取引の頻度は  $\lambda m_{ho}(t) m_{ln}(t)$  となると考える。また、強度を  $\rho_{bid}, \rho_{ask}$  とすると、ビッド取引の頻度は  $\rho_{bid} m_{ho}(t) m_{mn}(t)$ 、アスク取引の頻度は  $\rho_{ask} m_{mo}(t) m_{ln}(t)$  となる。

上記の条件に基づき、3次元のノード (状態空間)  $(i, j, k)$  (各々、 $m_{ho}(t), m_{ln}(t), m_{mo}(t)$  を表す) を考えたマルコフ連鎖モデルを構成する。 $i, j, k$  は定められた強度であるノードから隣接したノードに遷移する。マルコフ連鎖モデルから各タイプの市場参加者数に関する定常分布を得ることができるので、以下のバーゲニング・モデルを使い証券の「均衡価格」が導出できる。

このとき、相対取引価格  $P(X_t)$ 、アスク取引価格  $A(X_t)$ 、ビッド取引価格  $B(X_t)$  は、

$$P(X_t) = \Delta V_h(X_t)(1-q) + \Delta V_l(X_t)q$$

$$A(X_t) = \Delta V_m(X_t)(1-z_{ask}) + \Delta V_l(X_t)z_{ask}$$

$$B(X_t) = \Delta V_h(X_t)z_{bid} + \Delta V_m(X_t)(1-z_{bid})$$

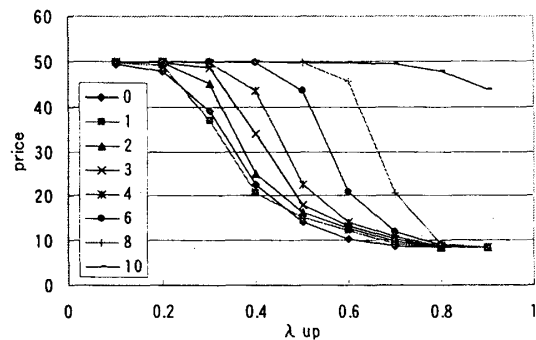
と書ける。なお、 $q$  は売り手の価格付けにおける支配力、 $z_{ask}, z_{bid}$  はマーケット・メーカーの価格付けにおける支配力を示す。また、 $\Delta V_l(X_t)$  はタイプ  $ln$  の参加者の留保価格 (「ここまでなら対価を払って証券を買いたい」とみなしている意味で証券の最高値)、 $\Delta V_h(X_t)$  はタイプ  $ho$  の参加者の留保価格、 $\Delta V_m(X_t)$  はマーケット・メーカーの留

保価格を示す。したがって、たとえば  $\Delta V_l(X_t) - \Delta V_h(X_t)$  は、取引から得られる正の価値 (gain) である。モデルの詳細は Kijima and Uchida[3]を参照。

### 3. 数値例

価格付けにおける支配力を  $q=0.5, z_{ask}=0.9, z_{bid}=0.1$  とし、マーケット・メーカーの最大在庫枚数を 0 枚 (マーケット・メーカー不在) から 10 枚に変化させて計算した結果を示す (パラメータ値は下表を参照)。マーケット・メーカーの最大在庫枚数が増加する (市場影響力が強くなる) と、証券の均衡価格が  $\lambda_{up}$  の変化の影響を受けにくくなる様子が観察された。他の数値例については当日説明する。

$r_l$	$r_h$	$r_m$	$c$	$M$	$S$	$\lambda_u + \lambda_d$	$\lambda$	$\rho_{ask} = \rho_{bid}$
5%	15%	5.1%	3%	32	20	1	10	100



### 4. 参考文献

- [1] BIS (1999): A Review of Financial Market Events in Autumn 1998.  
(日本銀行仮訳 (1999): 1998 年秋の国際金融危機)
- [2] Duffie, D, Garleanu, N. and L. H. Pedersen (2001): Valuation in Dynamic Bargaining Markets, working paper, Graduate School of Business, Stanford University.
- [3] Kijima, M. and Y. Uchida (2002): A Markov Model for Valuing Asset Prices in a Dynamic Bargaining Market, working paper, Graduate School of Economics, Kyoto University.