2002年日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

情報の非対称性の下での連続時間証券取引の市場均衡

02402014　京都大学経済学研究科　西出 勝正　NISHIDE Katsumasa

1　はじめに

市場参加者間における情報の非対称性を仮定した上での均衡価格の形成過程を分析する分野としてマーケット・マイクロストラクチャーがある．この分野における連続時間での取引をモデル化したベンチマーク的論文としてはKyle(1985)が挙げられる．本稿ではKyle(1985)を拡張し，清算価値が時間関数を拡散係数とする確率微分方程式に従うとした場合における均衡を分析する．その結果として，清算価値と流動取引の拡散係数が時間に依存して変化する場合においても市場の厚み(Kyleのλの逆数)がKyle(1985)と同様に一定値を取ることを示す．

2　モデル

一種類の証券を取引する市場を考える．取引は$t \in [0,1]$で連続的に行われるものとする．証券の真の価値(清算価値)$V(t)$は$t=0$の時点では正規分布$N(P(0),\overline{\Sigma})$に従い，以下の確率微分方程式に従って変化するものとする．

$$\mathrm{d}V(t) = \gamma(t)\mathrm{d}W(t) \tag{1}$$

但し，$\{W(t)\}$は標準Brown運動である．$t=1$で全ての取引が終了し，最終清算価値$V(1)$が公表される．

この証券を取引する市場参加者は以下の3人である．

(1) 情報トレーダー

(2) 流動トレーダー

(3) マーケットメーカー

それぞれの主体は以下の戦略を採るものとする．

(1) 情報トレーダーは時点tでの清算価値の実現値$V(t)$が観察可能で，$V(t)$と市場での取引価格$P(t)$を基にマーケットメーカーに対して以下の売買注文を出す．

$$\mathrm{d}X(t) = \beta(t)(V(t)-P(t))\mathrm{d}t \tag{2}$$

(2) 流動トレーダーは外生的な要因によって売買注文を出す．その注文量は以下の確率微分方程式に従う．

$$\mathrm{d}Z(t) = \sigma(t)\mathrm{d}U(t) \tag{3}$$

但し，$\{U(t)\}$は標準Brown運動で$\{W(t)\}$と独立とする．

(3) マーケットメーカーは，以下で定める市場全体の売買注文$\mathrm{d}Y(t) := \mathrm{d}X(t) + \mathrm{d}Z(t)$の線形関数として取引価格を改定し，売買注文に応じる．

$$\mathrm{d}P(t) = \lambda(t)\mathrm{d}Y(t) \tag{4}$$

以下を満たす時間についての確定関数の組$(\beta(t),\lambda(t))$を市場均衡と言う．

1. 情報トレーダーは以下の期待利潤を最大化している．

$$E\left[\int_0^1 (V(1)-P(t))\mathrm{d}X(t)\right] \tag{5}$$

2. マーケットメーカーの付ける取引価格は市場全体の売買注文を条件とする条件付期待値となっている．

$$P(t) = E[V(t)|\{Y(s)\}_{s\le t}] \tag{6}$$

次節で市場均衡を満たす$\beta(t),\lambda(t)$を導出する．

3 結果

(1),(4) より，マーケットメーカーの価格付け問題は以下のフィルタリング問題に帰着される．

$$\text{状態変数}\quad \mathrm{d}V(t) = \gamma(t)\mathrm{d}W(t) \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\text{観測値}\quad \mathrm{d}P(t) =& \lambda(t)\beta(t)V(t)\mathrm{d}t - \lambda(t)\beta(t)P(t)\mathrm{d}t \\ & - \lambda(t)\sigma(t)\mathrm{d}U(t)\end{aligned} \tag{8}$$

$M(t) := E[V(t)|\{Y_s\}_{s\le t}], \Sigma(t) := \mathrm{Var}[V(t)|\{Y_s\}_{s\le t}]$ と定義すると，フィルタリング問題における結果から以下が成立している．

$$\mathrm{d}M(t) = \frac{\beta(t)\Sigma(t)}{\lambda(t)\sigma(t)^2}\mathrm{d}P(t) \tag{9}$$

$$\dot{\Sigma}(t) = \gamma(t)^2 - \frac{\beta(t)^2\Sigma(t)^2}{\sigma(t)^2} \tag{10}$$

市場均衡においては $M(t) = P(t)$ であるから，(9) により

$$\lambda(t) = \frac{\beta(t)\Sigma(t)}{\sigma(t)^2} \tag{11}$$

が成立している．

一方，(5) に (2) を代入すると情報トレーダーの期待利潤は以下のように書き換えられる．

$$\int_0^1 \beta(t)\Sigma(t)\mathrm{d}t \tag{12}$$

ここで (10) の関係によって，情報トレーダーの制御変数を $\beta(t)$ ではなく，$\Sigma(t)$ と見なすことができる．(10) 式を (12) 式に代入すると，期待利潤は

$$\int_0^1 \sigma(t)\sqrt{\gamma(t)^2 - \dot{\Sigma}(t)}\mathrm{d}t \tag{13}$$

となる．

この問題は変分法を使って解くことができる．即ち，(13) の被積分関数を f とすると，Euler 方程式から

$$\begin{aligned}& f_\Sigma - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{\dot{\Sigma}} \\ &= \frac{2\dot{\sigma}(t)[\gamma(t)^2 - \dot{\Sigma}(t)] - \sigma(t)[2\gamma(t)\dot{\gamma}(t) - \ddot{\Sigma}(t)}{4[\gamma(t)^2 - \dot{\Sigma}(t)]^{\frac{3}{2}}} = 0\end{aligned} \tag{14}$$

$$\therefore \ddot{\Sigma}(t) - \frac{2\dot{\sigma}(t)}{\sigma(t)}\dot{\Sigma}(t) + \frac{2\gamma(t)\dot{\sigma}(t) - 2\gamma(t)\dot{\gamma}(t)\sigma(t)}{\sigma(t)} = 0 \tag{15}$$

が得られる．

常微分方程式 (15) は定数変化法を使って明示的に求めることができる．境界条件は $\Sigma(0) = \overline{\Sigma}, \Sigma(1) = 0$ であるから，以下の解を得る．

$$\begin{aligned}\Sigma(t) =& \overline{\Sigma} - \frac{\int_0^1 \gamma(s)^2\mathrm{d}s + \overline{\Sigma}}{\int_0^1 \sigma(s)^2\mathrm{d}s}\int_0^t \sigma(s)^2\mathrm{d}s \\ & + \int_0^t \gamma(s)^2\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{16}$$

以上から，均衡における $\beta(t)$ は (10) と (16) により

$$\beta(t) = \frac{\sqrt{\frac{\int_0^1 \gamma(s)^2\mathrm{d}s + \overline{\Sigma}}{\int_0^1 \sigma(s)^2\mathrm{d}s}\sigma(t)^2}}{\overline{\Sigma} - \frac{\int_0^1 \gamma(s)^2\mathrm{d}s + \overline{\Sigma}}{\int_0^1 \sigma(s)^2\mathrm{d}s}\int_0^t \sigma(s)^2\mathrm{d}s + \int_0^t \gamma(s)^2\mathrm{d}s} \tag{17}$$

となり，$\lambda(t)$ は (11) より

$$\lambda(t) = \sqrt{\frac{\int_0^1 \gamma(s)^2\mathrm{d}s + \overline{\Sigma}}{\int_0^1 \sigma(s)^2\mathrm{d}s}} \tag{18}$$

となる．

即ち，清算価値と流動取引が時間に依存した拡散係数を持つ確率微分方程式に従っている場合でも $\lambda(t)$ は一定値を取り，これは Kyle(1985) の結果と一致する．

謝辞 本稿作成に当たり、指導教官の木島正明教授には大変貴重なコメントを頂いた．この場を借りて謝意を表したい．

参考文献

[1] Back, K. (1992) : "Insider Trading in Continuous Time," *Review of Financial Studies*, **5**, 387-409

[2] Back, K., C. H. Cao and G. A. Willard (2000) : "Imperfect Competition among Informed Traders," *Journal of Finance*, **55**, 2117-2155

[3] Kyle, A. S. (1985) : "Continuous Auctions and Insider Trading," *Econometrica*, **53**, 1315-1335.

[4] Liptser, R. S. and A. N. Shiryaev (2001) : *Statistics of Random Processes I: General Theory 2nd ed.*, Springer-Verlag