

非完備情報リアル・オプションにおける企業プロジェクトの細分化された不確実性に対する比較静学

02203164 京都大学 経済学研究科 芝田 隆志 SHIBATA Takashi

1 はじめに

本論では、リアル・オプション・アプローチを非完備情報モデルで分析することにより、企業の直面する不確実性が、情報の不確実性、収益の不確実性、推定の不確実性の3つに分解される。その結果、3つの不確実性が、企業のプロジェクト価値にどのような影響を与えるかについて数値計算から考察する。非完備情報リアル・オプションの先行研究では、収益が確定的な定数として分析されている。本論では収益にも不確実性を導入し、非完備情報モデルにおいて収益の不確実性が增大するとプロジェクト価値も増大するという結果が数値計算から得られる。また、企業が収益の不確実性に直面しても、情報の不確実性が増大すると企業のプロジェクト価値が減少し、推定の不確実性が増大すると企業のプロジェクト価値が増大するという先行研究と同様な結論が得られた。

2 モデル

本論では、プロジェクト投資機会に直面している企業が、プロジェクトの収益についての情報を自ら収集するリアル・オプション・モデルを構築する。企業がプロジェクトに対する情報を自ら収集をするという仮定は、企業はプロジェクトを実行する前に、プロジェクトに対する研究開発あるいはマーケティング調査などを自ら実行するからである。また、プロジェクト実行前におけるこれらの投資には、情報を攪乱するノイズが含まれており、その情報は以下の確率微分方程式として

$$dC_t = \theta_t dt + \sigma_\alpha dz_t^\alpha, \quad C_0 = 0 \quad (1)$$

と表されるとする。ただし C_t は時点 t における研究開発投資による累積のキャッシュ・フローであり、 θ_t をプロジェ

クトの収益を決定する状態変数と仮定する。 $\sigma_\alpha \in \mathbf{R}_+$ は確定的な定数、 z_t^α は標準ブラウン運動とする。

他方、プロジェクトの収益に影響を与える状態変数 θ_t は、次の確率微分方程式

$$d\theta_t = a(m - \theta_t)dt + \sigma_\beta dz_t^\beta \quad (2)$$

に従うと仮定する。ここで $a, m, \sigma_\beta \in \mathbf{R}_+$ は確定的な正の定数で、 θ_0 はガウス型確率変数、 z_t^β は標準ブラウン運動とし、 $\{z_t^\alpha\}_{t \geq 0}$ は $\{z_t^\beta\}_{t \geq 0}$ および θ_0 とそれぞれ互いに独立と仮定する。

企業の意思決定問題においては、プロジェクトへの大規模投資の実行、プロジェクトからの完全撤退、プロジェクト実行および撤退の保留という3つの選択肢に企業は直面する。すなわち企業のプロジェクト価値 V_t は以下のように表される。

$$V_t = \max \left\{ 0, E_t \left[dC_t + \frac{1}{1+rdt} (V_t + dV_t) \right], \frac{K\mu_t}{r} \right\}$$

ただし $E_t[\theta_t] = \mu_t$, $Var_t[\theta_t] = E_t[(\theta_t - E[\theta_t])^2] = \sigma_t^2$ であり、 $E_t[\cdot]$, $Var_t[\cdot]$ はそれぞれ時点 t での条件つき期待値と分散を表す。 $K \in \mathbf{R}_+$ は1より大きい正の定数、また r を市場利子率と仮定する。プロジェクト価値 V_t の各項は、第1項がプロジェクトを閉鎖するときの価値、第2項が投資および閉鎖の決定を保留するときの価値である。この価値は研究開発における収益の変化と企業価値の変化の合計として評価される。第3項がプロジェクト実行における価値である。プロジェクトの収益は、状態変数 θ_t の期待値 $E_t[\theta_t] = \mu_t$ に定数倍 $K > 1$ を乗じたものと仮定する。投資実行の保留領域を (μ_L, μ_H) とし、経営者は $\mu_t \leq \mu_L$ の場合には時点 t においてプロジェクトを閉鎖する戦略、 $\mu_t \geq \mu_H$ の場合には時点 t においてプロジェクトへの投資を実行すると仮定し、企業の投資に対するプロジェクト価値を算出する。

企業は研究開発からプロジェクトについての情報を観察する。企業が時刻 t において (1) 式からプロジェクトに関する情報を観察するとき、観察できない (2) 式に従う θ_t の最良な推定には、カルマン・フィルター理論が用いられる。その理論によると、 θ_t の条件つき期待値と分散は、

$$d\mu_t = \left\{ a(m - \mu_t) + \frac{\Delta_t}{\sigma_\alpha} (\theta_t - \mu_t) \right\} dt + \Delta_t dz_t^\alpha \quad (3)$$

$$d\sigma_t^2 = [-2a\sigma_t^2 + \sigma_\beta^2 - \Delta_t^2] dt \quad (4)$$

$$\Delta_t \equiv \frac{\sigma_t^2}{\sigma_\alpha} \quad (5)$$

となる。プロジェクトを保留している場合の続行領域 $\mu_t \in (\mu_L, \mu_H)$ では、

$$V_t = E_t \left[dC_t + \frac{1}{1+rdt} (V_t + dV_t) \right] \quad (6)$$

という価値関数となる。プロジェクトの価値 V_t は $V_t = V(\mu_t, \sigma_t^2, t)$ である。またプロジェクトの期待値がある水準を超えない場合、経営者は投資を保留し続ける。このため、本論での企業の続行領域におけるオプション価値は、金融商品でいう満期なしのアメリカン・オプションとして考えられる。この理由から V_t は (μ_t, σ_t^2) の 2 変数関数となり、以下では $V_t = V(\mu_t, \sigma_t^2)$ と設定する。伊藤のレナマを用いて整理すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} V_{\mu\mu}(\mu, \sigma^2) \Delta^2 + V_{\sigma^2}(\mu, \sigma^2) (-2a\sigma^2 + \sigma_\beta^2 - \Delta^2) \\ & + V_\mu(\mu, \sigma^2) a(m - \mu) + \mu - rV(\mu, \sigma^2) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

が得られる。この偏微分方程式は、

$$\begin{aligned} V(\mu_L, \sigma^2) &= 0, & V(\mu_H, \sigma^2) &= \frac{K\mu_H}{r} \\ V_\mu(\mu_L, \sigma^2) &= 0, & V_\mu(\mu_H, \sigma^2) &= \frac{K}{r} \end{aligned} \quad (8)$$

の境界条件を満たさなければならない。投資の続行領域 (μ_L, μ_H) は未知なので、投資の続行領域は偏微分方程式の解と同時に求めなければならない。このような境界値が未知の問題は自由境界値問題と呼ばれる。本モデルは 2 変数の自由境界値問題である。このような境界条件を満たす偏微分方程式 (7) は閉じた解を求めることができない。それゆえ次節では陰的有限差分法による数値計算から、偏微分方程式 (7) と続行領域の性質について考察する。

3 数値計算

本節では、数値計算から不確実性に対する企業のプロジェクト価値についての比較静学をする。偏微分方程式 (7) から分かるように、プロジェクト価値は 3 つの不確実性に依存する。それぞれ不確実性 $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma$ は、情報、収益、推定の不確実性と考えられる。数値計算の結果は以下の通りである。

	μ_L	μ_H	企業価値	
σ_α	0.05	-0.42	0.29	2.4288
	0.10	-0.30	0.21	2.0090
	0.15	-0.26	0.17	1.7641
σ_β	0.00	-0.29	0.21	1.9417
	0.025	-0.30	0.21	2.0090
	0.05	-0.32	0.22	2.1400
σ	0.10	-0.18	0.12	1.2529
	0.15	-0.30	0.21	2.0090
	0.20	-0.59	0.43	3.2120

注) 企業価値は $\mu = 0$ の水準である。

表 1: 企業価値と続行領域の変化

表 1 の結果から、非完備情報モデルにおいても、収益の不確実性が增大するとプロジェクト価値も増大するという命題を、数値計算から証明することができる。また、情報の不確実性が增大するとプロジェクト価値が減少し、推定の不確実性が增大するとプロジェクト価値が増大するという結果が得られた。

謝辞 本稿作成にあたり、指導教官の木島正明教授には大変貴重なコメントを頂いた。この場を借りて謝意を表したい。

参考文献

- [1] Bernardo Antonio. E., and E. Bhagwan Chowdhry, (2002), "Resources, real Options, and Corporate Strategy", Journal of Financial Economics, 63 pp211-234