償還条項付き転換社債の評価について

02702073　南山大学　＊八木 恭子　YAGI Kyoko
01202653　南山大学　澤木 勝茂　SAWAKI Katsushige

1　はじめに

償還条項付き転換社債とは，定期的なクーポン支払いがあるだけでなく，投資家 (所有者) に一定期間内の任意の時刻で転換社債を株式に転換することが可能な権利を与え，さらに企業 (発行人) に任意の時刻で転換社債を償還する権利を与える証券である．ただし，企業が償還した場合，投資家はその時刻で転換社債を株式へ転換するか，企業に償還価格で買い戻されるかを選択しなければならない．本研究では，償還条項付き転換社債に対して投資家の最適転換政策と企業の最適償還政策を明示的に考察することで転換社債の評価を議論する．このような転換社債は，企業も投資家も共に権利を行使するオプションを有する条件付き請求権であるとみなすことで，オプションの評価理論 [4] を展開することが可能である．本研究では，投資家および企業の最適政策の定性的な性質を明らかにし，転換条項を付与することで転換社債がより高く評価され，償還条項を付与することでより低く評価されることを論証する．さらに数値計算を通して転換社債の評価式と最適政策を視覚的に実現する．

2　転換社債の定式化

本研究では，転換社債と株式のみで資金の調達をしている企業を考える．この企業の時刻 t での総価値 $V(t)$ は

$$V(t) = CB(t, V(t)) + mS^b(t) \tag{1}$$

である．ただし，$CB(t, V(t))$ は，満期 T での額面総額が F の転換社債の時刻 t での総価値であり，m と $S^b(t)$ はそれぞれ転換社債が転換される前の株式の発行数と時刻 t での株価である．同様に転換社債の転換後の時刻 t での株価を $S^a(t)$ とすると企業価値は

$$V(t) = (n + m)S^a(t)$$

となる．ただし，n は転換社債が株式に転換される株式数である．希薄化因子を $z = n/(n + m)$ とすると，時刻 t での転換価値 $C(t, V(t))$ は

$$C(t, V(t)) = nS^a(t) = zV(t) \tag{2}$$

となる．また，時刻 t で企業が転換社債を償還したとき，投資家が転換しない場合に企業に買い戻される償還価格を $CP(t)$ とし，クーポンの支払日での支払額を I とする．
以下では，取引期間を有界な閉区間 $[0, T]$ とし，(1) 式で示した企業価値を危険資産とみなすことで危険資産と無危険資産の 2 種類の資産が取引される資産市場を想定し，資産評価理論 [4] を展開する．企業価値の変動は確率微分方程式

$$dV(t) = rV(t)dt + \kappa V(t)d\tilde{Z}(t) \tag{3}$$

にしたがうとする．ただし，r と κ はそれぞれ無危険利子率とボラティリティ (定数)，確率過程 $\{\tilde{Z}(t); 0 \le t \le T\}$ は，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \tilde{P})$ で定義される標準ブラウン運動である．また，無危険資産の価格 $B(t)$ は

$$dB(t) = rB(t)dt,\ B(0) > 0,\ r > 0$$

にしたがうとする．時刻 t における危険資産および無危険資産の保有量をそれぞれ $\alpha(t), \beta(t)$ とし，時刻 t でのポートフォリオ $\pi(t)$ を $\pi(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ とすると，$\pi = \pi(t)$ の下での富の過程 $W^\pi = \{W^\pi(t), 0 \le t \le T\}$ は

$$W^\pi(t) = \alpha(t)V(t) + \beta(t)B(t)$$

で与えられる．自己充足的なポートフォリオ $\pi = \pi(t)$ に対して

$$e^{-rt}W^\pi(t) = w + \kappa \int_0^t e^{-rs}\alpha(s)V(s)d\tilde{Z}(s)$$

となり，$\tilde{W}^\pi(t) \equiv e^{-rt}W^\pi(t)$ は $\tilde{P}$ に関してマルチンゲールとなる．ただし，$W^\pi(0) = w$ である．
次にこの資産市場における転換社債の評価について議論する．まず投資家の最適転換政策と企業の最適償還政策をそれぞれ次のように定義する．

＜最適転換政策＞
投資家は任意の時刻で転換社債を株式に転換することが可能な権利が与えられる．投資家は転換社債の価値を最大化するように最適な転換政策を実行する．つまり，転換社債の価値が転換した場合の価値 (2) より低いならば，投資家は転換することは最適でない．ゆえに最適な転換政策の下で投資家は

$$CB(t, V(t)) \le C(t, V(t))$$

ならば転換社債を転換する．

＜最適償還政策＞
企業には任意の時刻で転換社債を償還することが可能な権利が与えられる．ただし，企業が償還した場合，投資家はその時刻で転換社債を株式へ転換するか，企業に償還価格で買い戻されるかを選択しなければならない．企業は (1) 式の転換社債の価値を最小化するように償還政策を実行することによって自社の株式の価値を最大化する．企業が償還した場合，投資家は $\max(C(t, V(t)), CP(t))$ を受け取る．ゆえに最適な償還政策の下で企業は

$$CB(t, V(t)) \ge \max(C(t, V(t)), CP(t)) \tag{4}$$

ならば転換社債を償還する．しかし，企業が償還しない場合でも $C(t,V(t))\geq CP(t)$ ならば，最適な転換政策を実行する投資家はすぐに転換する．したがって最適な償還政策の下で (4) は

$$CB(t,V(t))\geq CP(t)$$

となる．さらにクーポンの支払日における最適償還政策の下で企業は

$$CB(t^+,V(t^+)-I)+I\geq CP(t^-)$$

ならば転換社債を償還する．ただし，t^- は支払い直前の時刻であり，t^+ は支払い直後の時刻である．
以上の最適政策の下で転換社債の価値を定式化する．まず企業価値がゼロになる場合，転換社債の価値もゼロになる．よって

$$CB(t,0)=0$$

である．次に投資家は区間 $[0,T]$ の任意の時刻 τ で転換し，企業は区間 $[0,T]$ の任意の時刻 σ で償還するとすると転換社債が転換もしくは償還される時刻は $\tau\wedge\sigma$ となる．よって企業の投資家への支払い $R(\sigma,\tau)$ は

$$\begin{aligned}R(\sigma,\tau)= \quad & e^{-r\sigma}\max(C(\sigma,V(\sigma)),CP(\sigma))1_{\{\sigma<\tau\}}\\ & +e^{-r\tau}C(\tau,V(\tau))1_{\{\tau\leq\sigma\}}\end{aligned}$$

となる．ただし，$\tau,\sigma\in[t,T),t\in[0,T)$ であり，$\tau=\sigma$ のときは投資家の転換の権利が優先されるとする．また満期 T では

$$R(T,T)=e^{-rT}\min(V(T),\max(C(T,V(T)),F))$$

となる．転換もしくは償還の時刻の集合を $\mathcal{T}_{t,T}$ とする．満期 T をもつ転換社債に対するヘッジポートフォリオ π とはすべての t に対して確率 1 で

$$W^\pi(\sigma\wedge t)\geq R(\sigma,t),\ \forall t\in[0,T]$$

となるような償還時刻 $\sigma\in\mathcal{T}_{0,T}$ と自己充足的なポートフォリオ π の組 (σ,π) である．転換社債の価値を

$$CB^*(0)=\inf\{W\geq 0\mid\exists(\sigma,\pi)\mathrm{with}W^\pi(0)=W\}$$

で定義する．ただし，(σ,π) はヘッジポートフォリオである．つまり，転換社債の価値は

$$\begin{aligned}CB^*(t)&=\operatorname*{ess\,inf}_{\sigma\in\mathcal{T}_{t,T}}\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}}\tilde{E}[R(\sigma,\tau)|\mathcal{F}_t]\\&=\operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}}\operatorname*{ess\,inf}_{\sigma\in\mathcal{T}_{t,T}}\tilde{E}[R(\sigma,\tau)|\mathcal{F}_t]\end{aligned}\qquad(5)$$

であり，最適な転換もしくは償還時刻は

$$\hat{\tau}_t=\inf\{\tau\in[t,T)\mid CB^*(\tau)=C(\tau,V(\tau))\}\wedge T$$
$$\hat{\sigma}_t=\inf\{\sigma\in[t,T)\mid CB^*(\sigma)=\max(C(\sigma,V(\sigma)),CP(\sigma))\}\wedge T$$

で与える．さらにすべての $(\sigma,\tau)\in\mathcal{T}_{t,T}\times\mathcal{T}_{t,T}$ に対して

$$\tilde{E}[R(\hat{\sigma}_t,\tau)|\mathcal{F}_t]\leq\tilde{E}[R(\hat{\sigma}_t,\hat{\tau}_t)|\mathcal{F}_t]\leq\tilde{E}[R(\sigma,\hat{\tau}_t)|\mathcal{F}_t]\qquad(6)$$

が成立する [3]．(6) 式は転換社債は転換条項を付与することでより高く評価され，償還条項を付与することでより低く評価されることをあらわす．

3 数値計算

この節では (6) 式の関係を視覚的に実現するために二項モデルを用いて転換社債の価値を計算する．そのためには連続時間 t を離散化する必要がある．区間 $[0,T]$ を N 個に分割したときの離散時点 $\{k,k+1,\cdots,T\}$ での停止時刻の集合を $\mathcal{T}^N_{k,T}$ とする．この停止時刻の集合の下で (5) 式に対応する $CB^*_N(k)$ は

$$\begin{aligned}CB^*_N(k)&=\inf_{\sigma\in\mathcal{T}^N_{k,T}}\sup_{\tau\in\mathcal{T}^N_{k,T}}\tilde{E}[R(\sigma,\tau)|\mathcal{F}_k]\\&=\sup_{\tau\in\mathcal{T}^N_{k,T}}\inf_{\sigma\in\mathcal{T}^N_{k,T}}\tilde{E}[R(\sigma,\tau)|\mathcal{F}_k]\end{aligned}$$

で与えられる．　また，動的計画法の最適性の原理より $CB^*_N(k)$ は $k=N$ のとき $CB^*_N(N)=R(N,N)$ となり，$k=N-1,N-2,\cdots,0$ のとき

$$\begin{aligned}CB^*_N(k)=\max(&C(k,V(k)),\\&\min(CP(k),\tilde{E}[CB^*_N(k+1)|\mathcal{F}_k]))\end{aligned}$$

で与えられる．
計算結果については発表当日に提示する．

4 まとめ

本研究では，投資家の最適転換政策と企業の最適償還政策の定性的な性質を明らかにし，最適な転換時刻と最適な償還時刻を定義することで，転換条項を付与することで転換社債がより高く評価され，償還条項を付与することでより低く評価されることを論証した．また，数値計算を通して転換社債の評価式と最適政策を視覚的に実現した．

参考文献

[1] M.J.Brennan and E.S.Schwartz(1977), "Convertible Bonds:Valuation and Optimal Strategies for Call and Conversion", *The Journal of Finance*, **32**, 1699-1715.

[2] M.J.Brennan and E.S.Schwartz(1980), "Analyzing Convertible Bonds", *The Journal of Financial Quantitative Analysis*, **15**, 907-929.

[3] Y.Kifer(2000), "Game Options", *Finance and Stochastics*, **4**, 443-463.

[4] 澤木勝茂，瀬古進 (2003),"互恵型アメリカンオプションの評価について"，日本ファイナンス学会第 11 回大会予稿集, 525-537.