

ソフトウェア可用性モデルにおける近似計算法に関する一考察

01307475 鳥取大学 *得能貢一 TOKUNO Koichi
 01702425 鳥取大学 山田茂 YAMADA Shigeru

1 はじめに

本稿では、マルコフ過程に基づくソフトウェア可用性評価モデル[1]に対する近似計算法について議論する。このモデルは、 n 個のフォールトを修正するのに要する時間の分布関数 $G_n(t)$ を基に、種々の可用性評価尺度が導出される。しかしながら、 n の値が大きくなるにつれて、 $G_n(t)$ を算出することが非常に困難になる。そこで、ガンマ分布を用いた簡便な近似計算法を提案する。

2 ソフトウェア可用性モデル

時刻 t におけるソフトウェアシステムの状態を表す確率過程 $\{X(t), t \geq 0\}$ の状態空間を、以下のように定義する。

- W_n : システムは動作状態,
- R_n : ソフトウェア故障により、システムは修復状態.

ここで、 n は修復することができたフォールト数を表す。図1に、 $\{X(t), t \geq 0\}$ の状態遷移図を示す。図中の λ_n および μ_n は、それぞれハザードレート (ソフトウェア故障率) およびソフトウェア修復率を表し、 n の非増加関数が適用される。また、 a は完全デバッグ率を表す。

マルコフ解析により、状態 W_n への初到達時間を表す確率変数 S_n の分布関数は、

$$G_n(t) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} (A_{n,i}^1 e^{-x_i t} + A_{n,i}^2 e^{-y_i t})$$

$(t \geq 0; n = 1, 2, \dots; G_0(t) \equiv 1(t) \text{ (単位関数)})$, (1)

で与えられる。ここで、 x_i および y_i は、それぞれ

$$\left. \begin{matrix} x_i \\ y_i \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left[(\lambda_i + \mu_i) \pm \sqrt{(\lambda_i + \mu_i)^2 - 4a\lambda_i\mu_i} \right]$$

(複号同順), (2)

である。また、係数 $A_{n,i}^1$ および $A_{n,i}^2$ は、それぞれ

$$A_{n,i}^1 = \frac{\prod_{j=0}^{n-1} x_j y_j}{x_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} (x_j - x_i) \prod_{j=0}^{n-1} (y_j - x_i)}$$

$(i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$, (3)

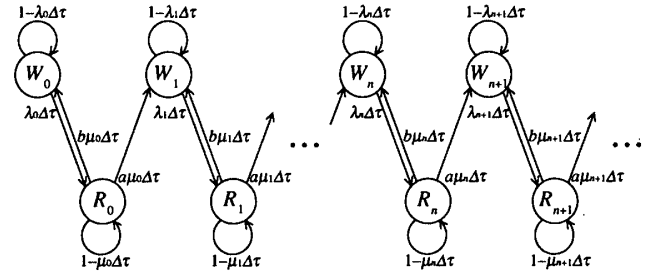


図1 $X(t)$ の状態遷移図.

$$A_{n,i}^2 = \frac{\prod_{j=0}^{n-1} x_j y_j}{y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} (y_j - y_i) \prod_{j=0}^{n-1} (x_j - y_i)}$$

$(i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$, (4)

により与えられ、

$$\sum_{i=0}^{n-1} (A_{n,i}^1 + A_{n,i}^2) = 1 \quad (n = 1, 2, \dots),$$
 (5)

を満たすことに注意する。また、 S_n の期待値および分散は、それぞれ

$$E[S_n] = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_i} + \frac{1}{y_i} \right),$$
 (6)

$$\text{Var}[S_n] = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_i^2} + \frac{1}{y_i^2} \right),$$
 (7)

となる。

時刻 t でソフトウェアシステムが動作可能である確率と定義される瞬間ソフトウェア・アベイラビリティ (instantaneous software availability) は、

$$A(t) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{n+1}(t)}{a\mu_n},$$
 (8)

となる。ここで、 $g_n(t) \equiv dG_n(t)/dt$ は、 S_n の確率密度関数を表す。また、式(8)の時間平均である

$$A_{av}(t) = 1 - \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_{n+1}(t)}{a\mu_n},$$
 (9)

は、平均ソフトウェア・アベイラビリティ(average software availability)と呼ばれ、時間区間(0, t]に対するシステムの動作時間の割合を表す。

3 $G_n(t)$ の近似計算法

式(8)および式(9)に示されるように、 $A(t)$ および $A_{av}(t)$ は、式(1)の $G_n(t)$ を用いて算出される。しかしながら実際には、 n の値が増加するにつれて、 $G_n(t)$ の算出が非常に困難になる場合がよく起こる。具体的には、 n が大きくなるにつれて、 $G_n(t)$ 中の係数 $A_{n,i}^1$ および $A_{n,i}^2$ が満たすべき条件である式(5)を満足しなくなる。

そこで本稿では、確率変数 S_n の分布状態を、ガンマ分布で近似することを考える。すなわち、 S_n の確率密度関数 $g_n(t) = dG_n(t)/dt$ を、形状パラメータ α_n および尺度パラメータ β_n をもつガンマ分布の確率密度関数

$$f_n(t) = \frac{\beta_n^{\alpha_n} t^{\alpha_n-1} e^{-\beta_n t}}{\Gamma(\alpha_n)} \quad (t \geq 0; \alpha_n > 0, \beta_n > 0), \quad (10)$$

で近似する。ここで、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数を表す。パラメータ α_n および β_n の決定については、モーメント法の考え方[2]を用いる。すなわち、

$$E[S_n] = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_i} + \frac{1}{y_i} \right) = \alpha_n / \beta_n, \quad (11)$$

$$\text{Var}[S_n] = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_i^2} + \frac{1}{y_i^2} \right) = \alpha_n / \beta_n^2, \quad (12)$$

とおき、これらを α_n および β_n について解いて、

$$\widehat{\alpha}_n = \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_i} + \frac{1}{y_i} \right) \right]^2 / \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_i^2} + \frac{1}{y_i^2} \right), \quad (13)$$

$$\widehat{\beta}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_i} + \frac{1}{y_i} \right) / \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_i^2} + \frac{1}{y_i^2} \right), \quad (14)$$

とする。したがって、 $g_n(t)$ を

$$\widehat{g}_n(t) \approx \frac{\widehat{\beta}_n^{\widehat{\alpha}_n} t^{\widehat{\alpha}_n-1} e^{-\widehat{\beta}_n t}}{\Gamma(\widehat{\alpha}_n)}, \quad (15)$$

と近似する。

4 適合性評価

本近似法の適合性評価尺度として、平均まわりの第3次および第4次モーメントの相対誤差の絶対値 R_{e3} および R_{e4} を考える。これらは以下のように与えられる。

$$R_{e3} = \left| 1 - \frac{2\alpha_n / \beta_n^3}{E[(S_n - E[S_n])^3]} \right|, \quad (16)$$

$$R_{e4} = \left| 1 - \frac{3\alpha_n^2 / \beta_n^4 + 6\alpha_n / \beta_n^4}{E[(S_n - E[S_n])^4]} \right|. \quad (17)$$

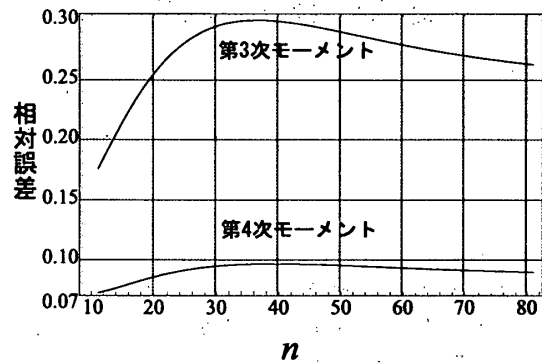


図2 R_{e3} および R_{e4} ($a = 0.9, D = 0.2, k = 0.9, E = 0.5, r = 0.94$).

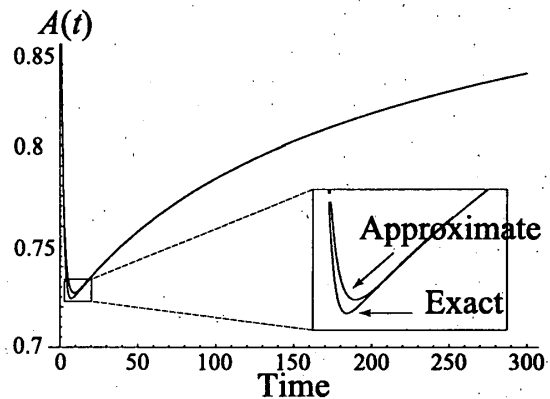


図3 $A(t)$ の比較 ($a = 0.9, D = 0.2, k = 0.9, E = 0.5, r = 0.94$).

5 数値例

図2に、 $\lambda_n \equiv Dk^n$ ($D > 0, 0 < k < 1$) および $\mu_n \equiv Er^n$ ($E > 0, 0 < r \leq 1$) を適用したときの R_{e3} および R_{e4} を示す。また図3に、式(8)の算出における式(1)を直接用いる場合と式(15)による近似計算による場合の比較を示す。これらの図より、本近似計算法の妥当性が確認できる。

謝辞

本研究の一部は、財団法人実吉奨学会平成15年度研究助成の援助を受けたことを付記する。

参考文献

- [1] K. Tokuno and S. Yamada, "Software availability theory and its applications," in Handbook of Reliability Engineering (Hoang Pham ed.), Chapter 12, pp. 235-244, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [2] 尾崎俊治, 品質管理・信頼性のための統計分布ハンドブック, 日本規格協会, 東京, 1994.