段取り替え制約付きカッティングストック問題に対する列生成法を用いた局所探索法の提案

02004704 豊田工業大学大学院工学研究科 *梅谷 俊治 UMETANI Shunji
01704164 京都大学大学院情報学研究科 柳浦 睦憲 YAGIURA Mutsunori
01001374 京都大学大学院情報学研究科 茨木 俊秀 IBARAKI Toshihide

1 まえがき

カッティングストック問題は，鉄鋼，繊維，製紙など多くの素材産業において，様々な形状や大きさの製品を，顧客の注文に応じて定型の母材から切出す問題である．使用母材本数の最小化を行う従来の定式化では，列生成法に基づく効率良い解法が幾つか提案されているが，段取り替え作業が多くなるため実用的な切出し計画が得られにくい．そこで，文献 [1] では，与えられた段取り替え回数の下で使用母材本数を最小化する段取り替え制約付きカッティングストック問題の定式化を行い，線形計画法に基づく局所探索法の提案した．本研究では，文献 [1] で提案した局所探索法に従来解法である列生成法を導入し，より効率の良い解法を実現する．

2 定式化

入力として長さ L の母材と製品集合 $M = \{1, 2, \dots, m\}$ が与えられる．各製品 $i \in M$ に対して長さ l_i と注文数 d_i が与えられる．以下の式 (1) を満たす1本の母材から切出す製品の組合せをカッティングパターン (以下パターンと略す) と呼び $p_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ で表す．

$$\sum_{i \in M} a_{ij} l_i \le L. \tag{1}$$

ここで，a_{ij} はパターン p_j に含まれる製品 i の数を表す．使用パターン数 n の下で使用母材本数を最小化するカッティングストック問題は，以下の通りに定式化できる．

$$\begin{array}{lll}
\text{(1DCSP)} & \min & f(\Pi, X) = \displaystyle\sum_{p_j \in \Pi} x_j \\
& \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{p_j \in \Pi} a_{ij} x_j - r_i = d_i \text{ for } i \in M \\
& & \Pi \subseteq S \\
& & |\Pi| \le n \\
& & x_j \in \boldsymbol{Z}_+ \text{ for } p_j \in \Pi \\
& & r_i \in \boldsymbol{Z}_+ \text{ for } i \in M.
\end{array} \tag{2}$$

ここで，Π は使用パターン集合 $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ を，X は各パターンの適用回数 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ を表す．また，S は式 (1) を満たす任意のパターンから成る集合を表す．

3 局所探索法

カッティングストック問題では，利用可能なパターンの数 $|S|$ は問題の規模 m に従って指数的に増加する．本研究では，1パターン入替え近傍に基づく局所探索法によって使用パターン集合 Π を求める．局所探索法とは，現在の解 Π の近傍 $N(\Pi)$ 内に改善解 Π' があれば，それに置き換えると言う操作を，近傍内に改善解がなくなるまで繰り返し行う手法である．通常，局所探索法を1回適用しただけでは良い精度の解は得られないので，本研究では，過去の探索における最良解に，ランダムな変動を加えて得られる解を初期解として局所探索法を繰り返し適用する反復局所探索法を用いている．

また，使用パターン集合 Π が与えられた際に，各パターンの適用回数 X を求める子問題は整数計画問題として定式化できる．そこで，各変数 x_j の整数制約を緩和した線形計画問題 (LP(Π) と表す) を解き，実数最適解 $\overline{X}$ を丸めて得られる整数解 $\hat{X}$ を各パターンの適用回数とする．

4 近傍解の生成

現在の使用パターン集合 Π に対する1パターン入替え近傍 $N_1(\Pi)$ を以下の通りに定義する．

$$N_1(\Pi) = \{\Pi \cup \{p(i', j')\} \setminus \{p_j\} \mid i' \in M'(\Pi), j' \in N\}. \tag{3}$$

$p(i', j')$ はパターン生成アルゴリズムの出力を，N は各使用パターン p_j の添字から成る集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ を表す．$M'(\Pi)$ は以下の式 (4) で定義する．

$$M'(\Pi) = \{i \mid \bar{y}_i > 0, i \in M\}. \tag{4}$$

ここで，$\bar{y}_i$ は線形計画問題 LP(Π) の双対問題 DLP(Π)(式 (5)) の最適解である．

$$\begin{array}{lll}
\text{(DLP}(\Pi)) & \max & \displaystyle\sum_{i \in M} d_i y_i \\
& \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i \in M} a_{ij} y_i \le 1 \text{ for } p_j \in \Pi \\
& & y_i \ge 0 \text{ for } i \in M.
\end{array} \tag{5}$$

$\sum_{i \in M} a_{ij'} \bar{y}_i > 1$ を満たすパターン $p_{j'}$ を新たに加えて双対問題を解き直すと最適値を改善できる．双対定理より線形計画問題 LP(Π) と，双対問題 DLP(Π) の最適値は一致するので，パターン $p_{j'}$ により目的関数 $f(\Pi, X)$ が改善できる事が分かる．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

パターン生成アルゴリズムは，現在の解 (Π, X) および (i', j') を入力とし，パターン $p_{j'} \in \Pi$ を変更して得られるパターン候補 $p(i', j')$ を出力する．まず，パターン $p_{j'}$ 内の製品 i' を 1 増やし，式 (1) を満たすなら終了．そうでなければ，i' 以外の製品を，$\bar{y}_i/l_i$ の小さい製品から式 (1) を満たすまで順に 1 ずつ減らす．以下の式 (6) を満たすなら終了．

$$L - \sum_{i \in M} a_{ij'} l_i < \min_{i \in M} l_i. \tag{6}$$

そうでなければ，式 (1) の制約の下で，$\bar{y}_i/l_i$ の大きい順に式 (6) を満たすまで製品 i を加える．

各製品 i の余剰数を r_i とすると，相補性条件より各 i について $\bar{y}_i > 0 \Leftrightarrow r_i = 0$ が成り立つ．ここから，パターン生成アルゴリズムは，注文を過不足なく満たしている製品を増やし，余剰のある製品を減らす操作を行っていると言える．

実際には，使用パターン数制約を満たすためにパターン削除も同時に行っているので，$\sum_{i \in M} a_{ij'} \bar{y}_i > 1$ を満たすパターン $p_{j'}$ を加えたからと言って必ずしも改善するわけではない．使用パターン $p_j \in \Pi$ と任意のパターン $p_{j'} \in S \setminus \Pi$ を入替えた際の目的関数の変化量を図 1，2 に示す．ここで，$z(\Pi, p_{j'}) = 1 - \sum_{i \in M} a_{ij'} \bar{y}_i$，$h(p_j, p_{j'}) = \sum_{i \in M} |a_{ij} - a_{ij'}|$ である． 図 1，2 から分かる様に，1 パターン入替え

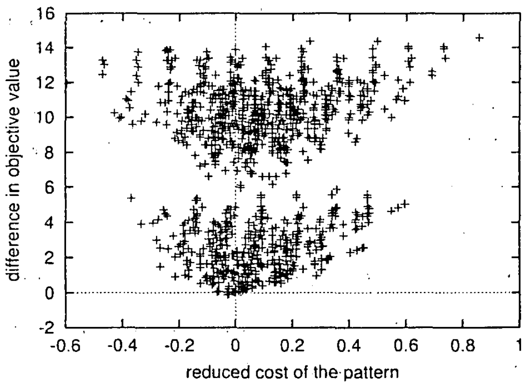

図 1: 1 パターン入替え時の目的関数の変化 (x 軸:$z(\Pi, p_{j'})$)

近傍では $z(\Pi, p_{j'})$ が最小となるパターンを生成するよりも，入れ替わり削除されるパターンに似たパターンを生成追加する方が改善解が得られやすい事が分かる．

5 列生成法の導入

式 (2) の定式化では，製品 i の余剰数 r_i に対して費用がかからず，線形計画問題 LP(Π) の基底変数に r_i が選ばれ易く x_j が選ばれにくい．そのため，使用パターン集合 Π に含まれているが適用回数が 0 となる空パターンが多く現れる．そこで，以下のナップサック問題 (式 (7)) を解いて得られるパターン $p_{j'} = (a_{1j'}, a_{2j'}, \ldots, a_{mj'})$ を空パターン p_j と入替える事で，解精度の向上を図った．

$$(\mathrm{KP}(\Pi)) \quad \max \sum_{i \in M} \bar{y}_i a_{ij'} \tag{7}$$

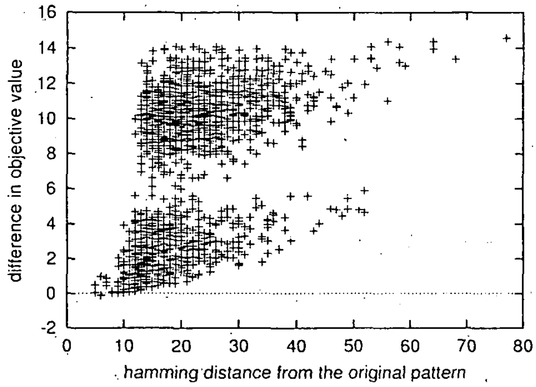

図 2: 1 パターン入替え時の目的関数の変化 (x 軸:$h(p_j, p_{j'})$)

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in M} l_i a_{ij'} \le L \\ & a_{ij'} \in \boldsymbol{Z}_+ \text{ for } i \in M. \end{aligned}$$

6 数値実験

提案解法の性能を計算機による数値実験により確認した．図 3 にランダムに生成した例題 $(m = 40)$ における計算結果を示す．x 軸は使用パターン数を y 軸は使用母材本数を表す．ILS は反復局所探索法

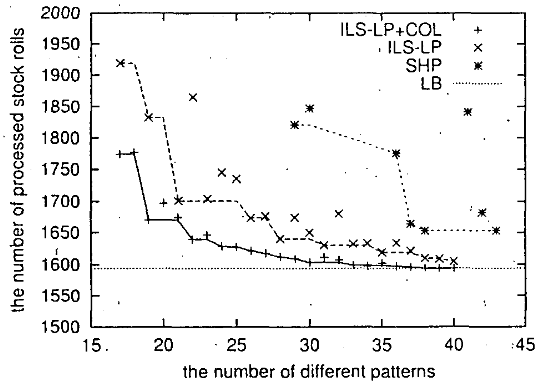

図 3: ランダム例題に対する解精度の比較

の結果を，ILS+COL は反復局所探索法内で列生成法を用いた結果を表す．また，SHP[2] は，パラメータにより使用パターン数と使用母材本数を調整する発見的手法である．図 3 より反復局所探索法内で列生成法を用いる事で，少ない使用パターン数でも良い精度の解が得られる事が確かめられた．

参考文献

[1] S. Umetani, M. Yagiura and T. Ibaraki, An LP-based Local Search Approach to the One Dimensional Cutting Stock Problem Using a Given Number of Cutting Patterns, *IEICE Transactions on Fundamentals*, E86-A(5), 1093–1102, 2003.

[2] R.E. Haessler, Controlling cutting pattern changes in one-dimensional trim problems, *Operations Research*, 23, 483–493, 1975.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．