

放射環状高速交通網を持つ都市平面における平均距離と交通網の最適パターン

02502660 筑波大学 *藤田 学洋 FUJITA Satohiro
 01205430 筑波大学 鈴木 勉 SUZUKI Tsutomu

1. はじめに

無数の放射路と複数の環状路を有する、人口分布が一様な円盤都市の平均距離は[1]で導出されている。本稿では、放射路本数も有限本に限られている場合の経路パターンを求め、平均距離を導出する。また、放射環状路が高速で移動可能な場合を考え、地点別および全体の平均距離の変化と平均距離を最小にする配置パターンを求める。

2. モデルの設定と経路パターン

本稿で扱うモデルを以下のように仮定する。

- a) Oを中心とする半径 R の円盤都市である。
- b) 交通需要は起点の領域と終点の領域におけるトリップ密度の積に比例する。
- c) 無限に稠密な低速環状路が存在する。
- d) 中心Oを通る m 本の高速放射路が存在し、隣接する高速放射路間の角差を π/m (rad) とする。
- e) Oを中心とする半径 a_1, \dots, a_n ($0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < R$) の n 本の高速環状路が存在する。
- f) 高速放射路とのなす角が $\pi/(2m)$ 以内の領域をその放射路のセクターとする。
- g) 起終点の最寄りの放射路を必ず経由して移動する。
- h) 高速路の速度を v_H 、低速路の速度を v_L として、速度比の逆数を $c = v_L/v_H$ とする。
- i) 出発地 $A(r, \theta)$ から目的地 $B(s, \phi)$ まで最短(時間)経路を移動する。

この交通網を m 放射 n 環状交通網と呼ぶ。これらの仮定により求められた $\theta = 0$ の放射路が含まれるセクター内の出発地 A から任意の目的地 B までの最短経路パターンを図1に示す。

セクター内の $A(0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi/(2m))$ から任意の目的地 $B(0 \leq s \leq R, 0 \leq \phi \leq \pi)$ までの最短距離 d は、

- 1) B が A のセクター内にあるとき
 $d_{00} = r\theta + c|r-s| + s\phi, 0 \leq s \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi/(2m)$
- 2) B が A のセクター内にないとき、 $\theta = 0$ から数えて k 番目の放射路を用いる経路の移動距離は、原点を通過する経路による距離を d_{k0} として、中心から数えて i 番目の環状路を使用する経路による距離 d_{ki} が考えられる。

$$d_{ki} = \begin{cases} r\theta + c(r+s) + s\left|\phi - \frac{k}{m}\pi\right| & k=1,2,\dots,m, i=0 \\ r\theta + c\left(|r-a_i| + a_i\frac{k}{m}\pi + |s-a_i|\right) + s\left|\phi - \frac{k}{m}\pi\right| & k=1,2,\dots,m, i=1,2,\dots,n \end{cases}$$

よって、最短移動時間は $d = \min_{k,i} d_{ki}$ である。

経路パターンを図1に示す。領域 S_i と S_{i+1} の境界は、

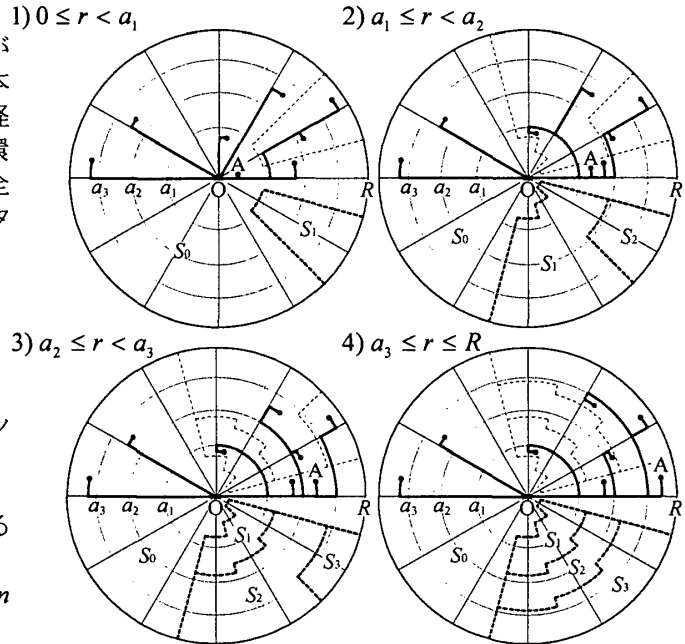


図1 経路パターンと領域分割 (m=6, n=3)

$a_0 = 0$ とすると

$$s = \frac{k}{2m} \pi(a_{i+1} - a_i) + a_{i+1} + a_i - r, \frac{2k-1}{2m} \leq \phi \leq \frac{2k+1}{2m},$$

$$k = 1, 2, \dots, \frac{2m(r-a_i)}{\pi(a_{i+1} - a_i)}$$

であり、領域 S_0 から S_i までの S_j と S_{j+1} の境界は、

$$s = \frac{k}{2m} \pi(a_{j+1} - a_j) + a_j, \frac{2k-1}{2m} \leq \phi \leq \frac{2k+1}{2m},$$

$$k = 1, 2, \dots, \frac{2m}{\pi}$$

である。

3. 平均距離の導出

3.1 地点別平均距離

ある出発地 $A(r, \theta)$ から任意の目的地 $B(s, \phi)$ までの m 放射 n 環状交通網を用いた地点別平均距離 D'_{mn} は、

$$D'_{mn}(r, \theta) = \frac{2}{\pi R^2} \int_{S_i} d(r, \theta, s, \phi)$$

により表される。これを解くと以下のようになる。

1) $0 \leq r < a_1, 0 \leq \theta \leq \pi/(2m)$ のとき

$$D'_{mn}(r, \theta) = \frac{c}{3\pi a_1 R^2} [r^4 - 4a_1 r^3 - 6(R+a_1)(R-a_1)r^2] + c\left(r + \frac{2}{3}R\right) + \frac{c}{12mR^2} [(\pi+12m)a_1 r^2 - 2(\pi+6m)a_1^2 r] + r\theta + \frac{\pi}{6m} R$$

2) $a_{i-1} \leq r < a_i, 0 \leq \theta \leq \pi/(2m)$ のとき

$$D'_{mn}(r, \theta) = \frac{c}{3\pi(a_i - a_{i-1})R^2} \left[r^4 - 4(a_i + a_{i-1})r^3 + 6(R + a_i + a_{i-1})(R - a_i - a_{i-1})r^2 + 4a_{i-1}(3R^2 - 3a_i^2 - 3a_i a_{i-1} - a_{i-1}^2)r - a_i a_{i-1}(6R^2 - 6a_i a_{i-1} - 7a_{i-1}^2) - 2a_i^4 \right] - \sum_{j=2}^i \frac{c}{3\pi R^2} (a_{j-1} - a_{j-2})(a_{j-1} + 2a_{j-2}) + c \left(r + \frac{2}{3}R \right) + \frac{c}{12m^2 R^2} \left[(\pi + 12m)a_i - (\pi - 12m)a_{i-1} \right]^2 - 2 \left[(\pi + 6m)a_i^2 + 12a_i a_{i-1} - (\pi - 6m)a_{i-1}^2 \right] + (\pi + 12m)a_i^2 a_{i-1} - 2(\pi - 6m)a_i a_{i-1}^2 + \sum_{j=1}^i \pi a_{j-1} (a_j^2 + a_j a_{j-1} - 2a_{j-1}^2) \Big] + r\theta + \frac{\pi}{6m} R$$

3) $a_n \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi/(2m)$ のとき

$$D'_{mn}(r, \theta) = c \left(r + \frac{2}{3}R \right) - \frac{c}{3\pi R^2} \left[6R^2 a_n - 3a_n^3 + \sum_{j=1}^n (a_j^2 a_{j-1} + a_j a_{j-1}^2 - 2a_{j-1}^3) \right] + \frac{c}{12m^2 R^2} \left[4m(r^3 - 3rR^2) + 12ma_n R^2 - (\pi + 4m)a_n^3 + \sum_{j=1}^n \pi(a_{j-1}(a_j^2 + a_j a_{j-1} - 2a_{j-1}^2)) \right] + r\theta + \frac{\pi}{6m} R$$

$m \rightarrow \infty (\theta \rightarrow 0)$ の極限をとると上記3式はともに n 環状交通網の地点別平均距離の式([1]参照)に一致する。

3. 2 地点間の平均距離

任意の 2 地点間の平均距離 D_{mn} は、区間

表1 放射環状高速交通網の最適パターン($R=1$)

1) $c=0.5$					2) $c=0.2$						
D_{mn}	環状路本数				D_{mn}	環状路本数					
	0	1	2	3		0	1	2	3		
1	1.447	1.447	1.447	1.447	1	1.207	1.207	1.207	1.207		
2	1.057	1.036	1.031	1.028	2	0.737	0.729	0.726	0.725		
3	0.927	0.872	0.862	0.858	3	0.580	0.558	0.554	0.552		
4	0.862	0.790	0.777	0.772	4	0.502	0.473	0.468	0.466		
5	0.823	0.740	0.726	0.720	5	0.455	0.422	0.416	0.414		
放射路本数	6	0.797	0.707	0.692	0.686	放射路本数	6	0.423	0.387	0.381	0.379
	7	0.778	0.683	0.667	0.661		7	0.401	0.365	0.357	0.354
	8	0.764	0.665	0.649	0.643		8	0.384	0.345	0.338	0.336
	9	0.753	0.651	0.635	0.628		9	0.371	0.330	0.324	0.321
	10	0.745	0.640	0.623	0.617		10	0.361	0.319	0.312	0.310
	11	0.738	0.631	0.614	0.607		11	0.352	0.309	0.303	0.300
	12	0.732	0.623	0.606	0.599		12	0.345	0.302	0.295	0.292
	13	0.727	0.617	0.600	0.593		13	0.339	0.295	0.288	0.285
	14	0.722	0.611	0.594	0.587		14	0.334	0.289	0.282	0.280
	15	0.719	0.606	0.589	0.582		15	0.329	0.284	0.277	0.275

白抜き数字は最適パターン時の平均距離

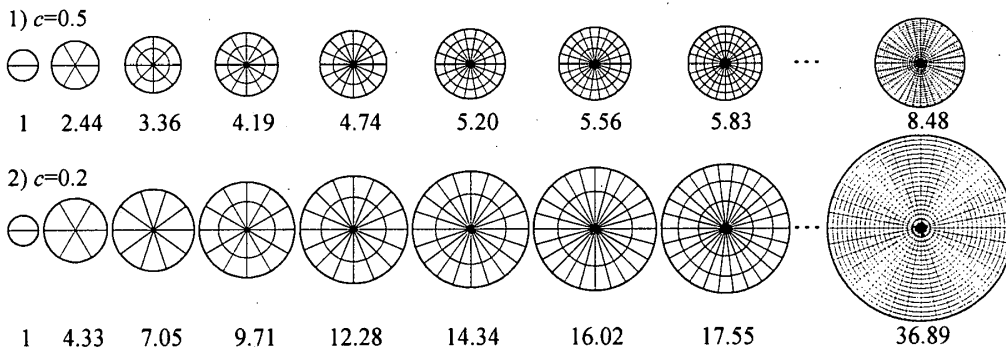


図2 放射環状高速交通網の最適パターンと2地点間の平均距離を等しくする都市面積

$0 \leq \theta \leq \pi/(2m)$ の地点別平均距離の総和を $2m$ 倍して円盤面積で除すことにより求められる。つまり、

$$D_{mn} = \frac{4m}{\pi R^2} \int_0^{\pi/2m} \int_0^R D'_{mn}(r, \theta) r dr d\theta$$

により得られる。これを用いて D_{mn} を求めると、

$$D_{mn} = \frac{4}{3}R - \frac{19}{45\pi} a_n^5 + \frac{2}{\pi} a_n^3 - \frac{2}{\pi} a_n + \sum_{j=2}^n \frac{1}{45\pi R^4} a_{j-1} (a_j - a_{j-1}) \left[-13a_j^3 + 18a_{j-1}^3 - 11a_j a_{j-1} (a_j - a_{j-1}) - 30(a_j + 2a_{j-1})R^2 \right] + \frac{5\pi - 8c}{15m} R + \frac{ca_n}{360m^2 R^4} \left[360mR^4 - 30(\pi + 8m)a_n^2 R^2 + (5\pi + 12m)a_n^4 \right] + \sum_{j=1}^n \frac{c}{72m^2 R^4} a_{j-1} (a_j - a_{j-1}) \left[6\pi(a_j + 2a_{j-1})R^2 + (\pi + 4m)a_j^3 - (\pi - 36m)a_j^2 a_{j-1} - (5\pi - 12m)a_j a_{j-1}^2 - 2\pi a_{j-1}^3 \right]$$

となる。 m 放射 n 環状交通網における 2 地点間の平均距離も同様に、 $m \rightarrow \infty$ とすると n 環状交通網の 2 地点間の平均距離に収束する([1]参照)。

4. 放射環状高速交通網の最適パターン

最初に放射路が 1 本の状態にある都市を考え、平均距離が小さくなるように高速の放射路または環状路を 1 本ずつ追加していくことを考える。速度比の逆数 c が 0.5 および 0.2 の場合を例に交通網の最適パターンを表1に示す。 c が小さいほど環状路より放射路が優先される。

また、最適パターン時の交通網における 2 地点間の平均距離が、最初の状態の平均距離と等しくなるように都市の面積を算出した(図2)。高速路が増えるほど、また速度比の逆数 c が小さいほど都市の面積が大きくなる。なお、高速路を無限に増加させると m 放射 n 環状交通網における都市の面積は、無数の放射路と環状路を持つ交通網(放射環状交通網)の都市面積($c=0.5$ のとき 8.48, $c=0.2$ のとき 36.89)に収束する。

5. おわりに

本稿では、環状路本数だけでなく放射路本数も限られる場合の平均距離を導出し、2 地点間の平均距離から最適な交通網パターンを求めた。本稿で用いた円盤都市モデルについて、セクター間の移動の制約を外した場合、また無数の低速放射路も存在する場合の平均距離を求めることは今後の課題である。

参考文献

- [1] 藤田学洋・鈴木 勉 (2003): 複数の環状路を持つ円盤都市における平均距離と環状路の最適配置。日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト集, 48-49.
- [2] Vaughan, R. (1987): Urban spatial traffic patterns. Pion Limited, 334 p.