

# ブラウン運動を用いた人の動きの記述と二者の接近確率

02203200 筑波大学 \*坂上友紀 SAKAGAMI Yuki

01102840 筑波大学 腰塚武志 KOSHIZUKA Takeshi

## 1. はじめに

毎年冬場になると、風邪やインフルエンザが大流行する。厚生労働省から、「人込みは避け、栄養を十分に取る事」との勧告が出される。しかし具体的にどのような場所が危険な人込みであるのかが定量的な指標を用いて議論されることはほとんどなく、判断はほとんど直感に依存している。

本論文では、「危険な人込み」とはどのようなものなのかを明らかにするために、方向性を入れたブラウン運動をもとに二者の接近確率を求め、どのような状況において接近確率が大きくなるのかについて考察する。

## 2. モデルの概要

まず、人と人との直線距離が1m以内になることを「接近する」と定義する。ここで距離を1mとするのは、一般的なウイルス粒子が人の体内から飛ぶ範囲として考えられているためである。ウイルスを持っている人と1m以内に接近することで感染することを想定する。

次に動き方を設定する。無限に広がる二次元のX,Y平面座標上にいるA,Bの2人を想定する。人の大きさや衝突は考慮せず、互いに独立であるとする。Aは原点O(0,0)から、Bは地点 $(\alpha, \beta)$ から同時刻に出発し、それぞれ速度一定で単位時間に距離1、方向は $\phi_{\theta_i}$ ラジアン、ランダムに動く。ただし $\phi$ は $0 \leq \phi \leq 2\pi$ をとり、動く方向を限定する定数である。 $\theta_i (i = 1, 2, \dots, t)$ は0から1までの一様乱数であり、単位時間ごとに独立な値をとる。単位時間あたりにX軸方向に $\cos \phi_{\theta_i}$ 、Y軸方向に $\sin \phi_{\theta_i}$ 進むとする。A,Bそれぞれのt秒後のX座標 $X_{a_t}, X_{b_t}$ 、Y座標 $Y_{a_t}, Y_{b_t}$ は、出発地点の座標値と単位時間あたりの増分を足しあげたものであり、

$$X_{a_t} = \sum_{i=1}^t \cos \phi_{\theta_{a_i}}, \quad X_{b_t} = \alpha + \sum_{i=1}^t \cos \phi_{\theta_{b_i}} \quad (1)$$

$$Y_{a_t} = \sum_{i=1}^t \sin \phi_{\theta_{a_i}}, \quad Y_{b_t} = \beta + \sum_{i=1}^t \sin \phi_{\theta_{b_i}} \quad (2)$$

と表すことができる。このときの $t = 1, 2, \dots, 20$ の人の動く軌跡を図1に示す。

中心極限定理より、 $t$ が大きくなるにつれて、 $X_{a_t}, X_{b_t}, Y_{a_t}, Y_{b_t}$ それぞれの分布は正規分布に近づく。

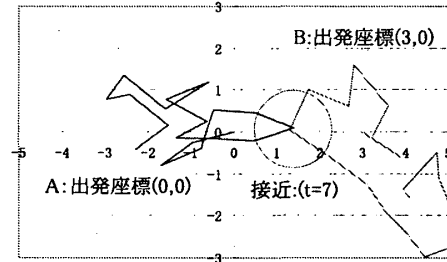


図1: ブラウン運動モデル ( $\phi = 2\pi$ )

A,B 二者の X,Y 座標の差 (距離ではない)  $X_t, Y_t$  の期待値及び分散を

$$\mu_{X_t} = E(X_t), \quad \mu_{Y_t} = E(Y_t) \quad (3)$$

$$\sigma_{X_t}^2 = V(X_t), \quad \sigma_{Y_t}^2 = V(Y_t) \quad (4)$$

とおくと、 $X_t, Y_t$  は互いに独立なので、これらは二次元正規分布

$$f(X_t, Y_t) = \frac{1}{2\pi\sigma_{X_t}\sigma_{Y_t}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(X_t - \mu_{X_t})^2}{\sigma_{X_t}^2} + \frac{(Y_t - \mu_{Y_t})^2}{\sigma_{Y_t}^2}\right)\right) \quad (5)$$

に従う。このときのt秒後の接近確率 $P_t$ は式6で示される。

$$P_t = \iint_{\sqrt{X_t^2 + Y_t^2} < 1} f(X_t, Y_t) dX_t dY_t \quad (6)$$

ただし $t$ は非負の整数をとる。

## 3. 計算結果と考察

2章で設定したモデルを元に、様々な状況を想定し、二者の接近確率を求める。

### 3.1 一方が静止し、一方が動くとき

Aが静止し、Bが360度( $\phi = 2\pi$ )一様な方向に動くときの接近確率を求める。二者のX,Y座標の差の期待値及び分散は

$$\mu_{X_t} = \alpha, \quad \mu_{Y_t} = \beta \quad (7)$$

$$\sigma_{X_t}^2 = \sigma_{Y_t}^2 = \frac{1}{2}t \quad (8)$$

となり、このときの二者の接近確率  $P_{t1}$  は

$$P_{t1} = \iint_{\sqrt{X_t^2 + Y_t^2} < 1} \frac{1}{\pi t} \exp\left(-\frac{(X_t - \alpha)^2 + (Y_t - \beta)^2}{t}\right) dX_t dY_t \quad (9)$$

となる。B の出発座標を変えたときの、 $t = 1, 2, \dots, 100$  の接近確率を図 2 に示す。

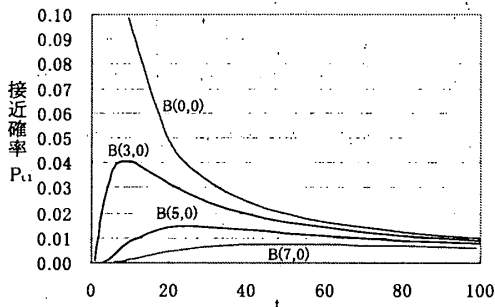


図 2: 一者が静止、一者が動くときの接近確率

出発時の距離が 7 以上のときは、二者の接近確率が 1%以下となり、これを無視できるものと考え、ほとんど接近しないとみなせる。また  $t = 100$  以上のときは、出発時の距離にかかわらず、接近確率を考慮しなくてもよいことがわかる。

### 3.2 二者がともに動いているとき

A, B がともにあらゆる方向 ( $\phi = 2\pi$ ) を動くときの接近確率を求める。X, Y 座標の差の期待値及び分散は

$$\mu_{X_t} = \alpha, \quad \mu_{Y_t} = \beta \quad (10)$$

$$\sigma_{X_t}^2 = \sigma_{Y_t}^2 = t \quad (11)$$

となり、分散  $\sigma_{X_t}^2, \sigma_{Y_t}^2$  はそれぞれ 3.1 節の 2 倍になっていることがわかる。B の出発座標を変えたときの、 $t = 1, 2, \dots, 100$  のときの接近確率  $P_{t2}$  を図 3 に示す。

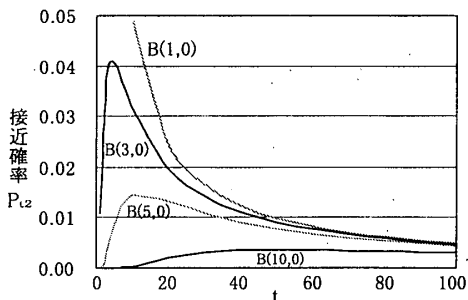


図 3: 二者が動くときの接近確率 ( $\phi = 2\pi$ )

出発時の距離が 10 以上のときは、二者の接近確率が 1%以下となり、ほとんど接近しないとみなせる。ま

た  $t = 50$  以上のときは、出発時の距離にかかわらず、接近確率を考慮しなくてもよいことがわかる。

### 3.3 方向づけモデル

進む角度を 180 度 ( $\phi = \pi$ ) に限定したときの  $X_t, Y_t$  の期待値および分散は

$$\mu_{X_t} = \alpha, \quad \mu_{Y_t} = \beta \quad (12)$$

$$\sigma_{X_t} = t, \quad \sigma_{Y_t} = \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^2} t \quad (13)$$

B の出発座標を変えたときの、 $t = 1, 2, \dots, 100$  の二者の接近確率  $P_{t3}$  を図 4 に示す。

出発時の距離が 30 以上のときは、二者の接近確率が 1%以下となり、ほとんど接近しないとみなせる。また  $t = 100$  以上のときは、出発時の距離にかかわらず、接近確率を考慮しなくてもよいことがわかる。

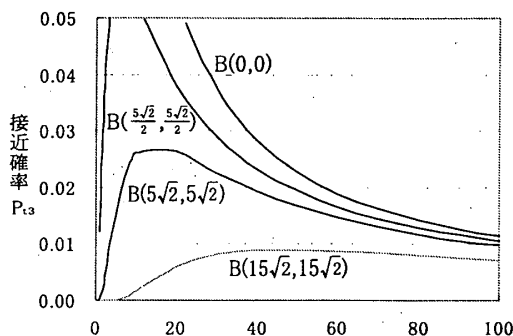


図 4: 動く角度を 180 度に限定した二者が動くときの接近確率

### 3.4 考察

このモデルでは出発座標の値が X, Y 座標の差の期待値になっており、分散は出発座標の値によらない。ランダムに人が動いている状況では、静止している人の方が動いている人よりも他者と接近する確率が高いことが明らかになった。また、動く角度が小さい方が接近確率が大きくなるということが数値的に明示された。

### 4. おわりに

本論文ではブラウン運動を用いて人の動きを表現することにより、二者の接近確率を数理的に求めることができた。計算結果より、二者の接近確率は、それぞれの動き方によって異なるが、出発座標に大きく依存し、最初に遠くにいる人のことは考慮しなくてもよいことがわかった。しかし、人は常に一定の速度で動くわけではないということ、ランダムではなく、目的をもって動いているので、現実の人の動きを観察しながらこれらを考慮したモデルに発展させることが必要である。