

# 相対効率モデルによるDEAモデルの表現 ならびにモンテカルロ法による効率値計算

申請中 日本大学生産工学部 † 岩楯 健寛  
Nihon University Iwadate Takehiro  
01205220 日本大学生産工学部 篠原 正明  
Nihon University Shinohara Masaaki

## 1 はじめに

DEA(データ包絡分析法)は,多入力多出力システムの効率性評価の手法である.評価対象となる多入力多出力システムのことを,入力項目と出力項目に関して評価ベクトルを決定する意思を持つ主体という意味でDMU(意思決定主体)と呼ぶ. DEAにおける相対評価とは,DMU集団の中の優れたもの集団(best performance frontier)を基準とした相対評価である.各DMUは自分の効率性が最大になるように,入出力項目の評価ベクトルを独立に決定する.

本研究では相対効率の観点からDEAモデルの一般化を行った相対効率モデルを定義し,相対効率モデル特殊例としてDEAを位置づける.また,最適効率の決定プロセスに対してはランダム評価者(各DMUの入出力データに対する評価ベクトル $v, u$ をランダムに決め,評価を行う第三者)を導入し,最適な相対効率値を与える評価がDEA評価に対応するという立場から,ランダム評価者が確率的に評価ベクトルを採用するプロセスを擬似したモンテカルロシミュレーションを提案する.

## 2 記号等

- $x_o$  : DMU<sub>o</sub>の入力データベクトル
- $v$  : DEAによる入力評価ベクトル
- $c$  : 相対効率法による入力評価ベクトル
- $y_o$  : DMU<sub>o</sub>の出力データベクトル
- $u$  : DEAによる出力評価ベクトル
- $b$  : 相対効率法による出力評価ベクトル
- $\theta$  : DEAによるDMU<sub>o</sub>の効率値

ここで,m入力n出力のシステムに対して,m次元ベクトル $x, v, c$ の各要素は $0 \leq x_j, 0 \leq v_j, 0 \leq c_j \leq 1$ ,n次元ベクトル $y, u, b$ の各要素は $0 \leq y_j, 0 \leq u_j, 0 \leq b_j \leq 1$ ,を仮定する.

## 3 DMU絶対効率値の定義

DMU相対効率モデルの定義の前に,相対効率モデルの元となる,目的とする個別DMU<sub>o</sub>の絶対効率値 $z_o$ を以下で定義する.

$$z_o = \frac{c^T y_o}{b^T x_o} \quad (1)$$

$z_o$ 自体ある種,入力に対する出力と言った意味で,相対的ではあるが,他のDMU群に寄らないと言う意味で,絶対効率値と定義する.車に例えて言えば,燃費に相当する.

## 4 一般相対効率値

上に示した絶対効率値を用いて,対象DMU群の一般相対効率値 $s_o$ を以下で定義する.

$$s_o = \frac{\text{対象DMU群の絶対効率値}}{\text{基準とする絶対効率値}} \quad (2)$$

基準とする絶対効率値は何でも良い.例えば,全DMU集合の中での絶対効率値の最大値でも良いし,逆に最小値でもよい.あるいは,効率的DMU集合を除いたDMU群の最大効率値などとしても良い.基準となる絶対効率値をどう与えるかによって,相対効率は異なるモデルを与え,そのいくつかはDEAモデルと一致する(3)式に示すような無制約最適化問題として定式化できる.例として,相対効率モデルとDEA-CCRIモデルとの関係を示す.

### 例 DEA-CCRIモデル

相対効率モデルにおいて,分子を個別DMUの絶対効率値,分母である基準を個別DMUの最大絶対効率値とすれば,DEA-CCRIモデルの効率値 $\theta$ と一致する.これより,相対効率値の最大値を求めた次

式は DEA-CCRI モデルの最適効率値  $\theta^*$  と一致する [2].

$$s_o^* = \max_{b,c} \frac{b^T y_o}{c^T x_o} \quad (3)$$

$$\max_j \frac{b^T y_j}{c^T x_j}$$

また、与えたランダム評価  $c, b$  と等価な DEA モデルの評価  $v, u$  の関係は次式である。(4),(5) 式より、相対効率法最適評価  $c^*, b^*$  から DEA 法最適評価  $v^*, u^*$  を知ることができる。

$$v = \frac{1}{c^T x_o} c \quad (4)$$

$$u = \frac{s_o}{b^T y_o} b \quad (5)$$

## 5 モンテカルロシミュレーションによる相対効率値の計算

(3) 式を元に、モンテカルロシミュレーションを行う。本研究のモンテカルロ法の強力な点は、パラメータさえ設定しておけば、最大相対効率値の求解と同時に区間効率値、さらに効率値の出現頻度などもわかることである。

表 1: 相対効率値モンテカルロ法解と DEA-Solver 解 [3] の比較

	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4	DMU5	DMU6
入力1	20	19	25	27	22	55
入力2	151	131	160	168	158	255
出力1	100	150	160	180	84	230
出力2	80	50	55	72	66	90
相対効率値モンテカルロ法解						
$c^*(1)$	0.720664	0.530961	0.000305	0.158879	0.194525	0.000305
$c^*(2)$	0.836512	0.015442	0.712912	0.726524	0.191931	0.712912
$b^*(1)$	0.079775	0.297403	0.573168	0.517594	0.302561	0.573168
$b^*(2)$	0.659169	0.294961	0.899996	0.996277	0.650594	0.899996
$v^*(1)$	0.005121	0.043641	2.67E-06	0.001257	0.005621	1.68E-06
$v^*(2)$	0.005944	0.001275	0.006225	0.00575	0.005546	0.003921
$u^*(1)$	0.001185	0.00501	0.003583	0.003139	0.003236	0.002248
$u^*(2)$	0.009794	0.004969	0.005626	0.006042	0.006959	0.00353
s.d.	1	1	0.882702	1	0.763495	0.834751
DEA-Solver 解						
$v^*(1)$	3.18E-02	3.46E-02	0	5.19E-03	5.62E-03	0
$v^*(2)$	2.41E-03	2.62E-03	0.006225	5.12E-03	5.55E-03	3.92E-03
$u^*(1)$	3.86E-03	4.19E-03	3.58E-03	2.99E-03	3.24E-03	2.25E-03
$u^*(2)$	6.82E-03	7.42E-03	0.005625	6.42E-03	6.96E-03	3.53E-03
Score	1	1	0.882708	1	0.763499	0.834771

表 2: 相対効率値の期待値

DMU1	DMU2	DMU3	DMU4	DMU5	DMU6
0.836914	0.961909	0.835475	0.932556	0.660563	0.733871

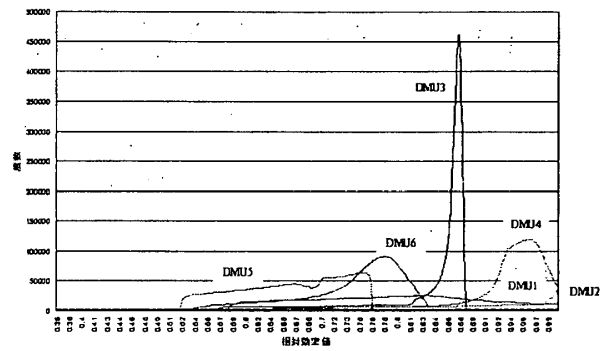


図 1: 相対効率値の度数分布

## 6 おわりに

DEA 効率値を計算する新しいアルゴリズムを提案した。本アルゴリズムは評価ベクトル  $v, u$  の決定に際し、ランダム評価者の存在を仮定して相対効率値を評価し、モンテカルロシミュレーションにより様々な  $v, u$  を生成し、その中で最適相対効率値を与える  $v, u$  を DEA 評価と考えた。

同じ最適効率値に対しても異なる相対効率値の分布が存在することなど、モンテカルロ法により得られる情報量の多さは従来の DEA 法にない長所の 1 つである。

今後の課題としては、提案するモンテカルロシミュレーションの、従来の線形計画法による解法では求解不可能な諸問題への適用である。例えば、評価ベクトルとして負値 (マイナス評価) も許容する場合、項目間の相関考慮などの評価者の意思決定プロセス、複雑な目的関数・制約の実現、などである。また、今回は最適相対効率ウェイトの決定プロセスとしてランダム評価者による評価を採用したが、今後の展開として、学習する評価者による評価をウェイト決定プロセスに組み込む事が考えられる。モンテカルロ法のネットワーク分散並列処理も今後の課題である。

## 参考文献

- [1] 刃根薫:『経営効率性の測定と改善』, 日科技連出版社, 9, 1993
- [2] 円谷友英, 前田豊, 田中秀夫:『区間効率値による DEA モデル』, オペレーションズリサーチ vol.44, pp425-434, 8, 1999
- [3] W.W.Cooper, L.M.Seiford, K.Tone: DATA ENVELOPMENT ANALYSIS, Kluwer Academic Publishers, 2000