

1 本の幹線への合流条件を定めた平面トラヒックのための待ち行列モデル

02602520 東京理科大学 *水野 信也 MIZUNO Shinya
01602570 東京理科大学 宮沢 政清 MIYAZAWA Masakiyo

1 はじめに

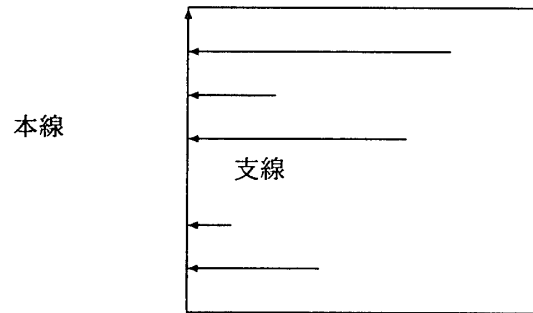
本論文は平面上の有界な領域でランダムに発生するトラヒックについて考察する。この領域上には1つの本線と本線につながる支線がある。本論文での目的は、支線から本線への合流に対する混雑の度合いを評価することである。すなわち、支線上のトラヒックが本線に合流するときの待ち時間を計算する。以下のことを仮定する。領域上ではポアソン過程に従いトラヒックが発生し、それらは本線にたどり着くまで支線を一定速度で移動する。そして合流点において c 個の空きスペースを観測後、続けてくる空きスペースがあれば合流できる。一旦合流すれば連続する空きスペースには続けて合流できる。このモデルの自然な場合として、本線上の合流地点は有限個に限られると仮定する。トラヒックは本線上を一定の速さで移動すると仮定する。合流地点だけを観察することによりこのモデルを離散時間型モデルとみることができる。ここでは定常状態を仮定して、待ち人数の定常分布を計算する。これより平均待ち人数が得られる。最後に合流条件を強めた例を考察し、数値計算を与える。

2 待ち人数の定常分布

上記のトラヒックモデルを数学的に表現する。このモデルでは、ある領域を用意し支線が配置されている。ここで領域の形や支線の配置を考えるのは、時間軸に対する変換を行うことに着目すれば本質的なことではない。例として図のような領域がある。そして本線に合流する支線が N 個配置されている。支線の合流地点を下からレベル $1, 2, \dots, N$ とする。本線の終点が目的地とする。このモデルの基本的仮定は

- 1) 各レベルで発生したトラヒックは c 個の空きスペースを観測後、続けてくる空きスペースがあれば合流できる。一旦合流すれば連続する空きスペースには続けて合流できる。
- 2) 各レベルごとの移動時間は一定とする。
- 3) $A_k(n)$ を時刻 $(n-1, n)$ での k レベルの到着数とし、

$A_k(1), A_k(2), \dots$ は独立で同一の分布に従う。 $\tilde{a}_k(z) = E[z^{A_k}]$ とする。
目的地



k レベルの時刻 n の「直前」の人数を $X_k(n)$ とする。また次の事象を定義する。

$$G_k(n) = \{X_k(n-l) = 0, l = 0, 1, 2, \dots, c\} \quad (2.1)$$

$$F_k(n) = G_k(n) \cap G_{k-1}(n-1) \cap \dots \cap G_1(n-k+1) \\ = G_k(n) \cap F_{k-1}(n-1), \quad (2.2)$$

これより各レベルの関係式は次のようになる。

$$X_k(n+1) = (X_k(n) - 1_{F_{k-1}(n-1)})^+ + A_k(n+1) \\ a^+ = \max(0, a) \text{ とする。また } k \text{ レベルの待ち人数の分布を計算するために}$$

$$\sigma_k(n) = \inf\{i > \sigma_k(n-1); F_k(i) \text{ holds.}\} \text{ for } n \geq 1, \\ \text{and } \sigma_k(0) = 0,$$

$$T_k(n) = \sigma_k(n) - \sigma_k(n-1), \text{ for } n \geq 1 \text{ and } T_k = T_k(1),$$

$$Y_k(n) = X_k(\sigma_{k-1}(n) + 1),$$

$$U_k(n) = A_k(\sigma_{k-1}(n) + 1) + A_k(\sigma_{k-1}(n) + 2) \\ \dots + A_k(\sigma_{k-1}(n+1)),$$

$$q_k = \prod_{i=1}^k P(A_i = 0) \quad (= \tilde{a}_1(0) \cdot \tilde{a}_2(0) \cdot \dots \cdot \tilde{a}_k(0)),$$

$$\eta_k(i) = \sigma_{k-1}(i) + 1$$

$$\tau_k = \min\{\eta_k(l) - \eta_k(0) \geq 1;$$

$$X_k(\eta_k(0)) - X_k(\eta_k(l)) = 1,\}$$

$$\tilde{g}_k(z) = E[z^{T_k}], \tilde{y}_k(z) = E[z^{Y_k}], \tilde{u}_k(z) = E[z^{U_k}],$$

$$\tilde{x}_k(z) = E[z^{X_k}], \tilde{\tau}_k(z) = E[z^{\tau_k}].$$

$$P(D_k = j) = \begin{cases} q_k^j(1 - q_k) & (0 \leq j \leq c-1) \\ q_k^c & (j = c) \end{cases} \quad \text{ここで}$$

を定義する。また

$$E[U_k] < 1. \quad (*)$$

を仮定しておく。これらを用いると次の定理を得る。

補題 2.1 条件 (*)のもとで、 X_k の母関数は、

$$\tilde{x}_k(z) = \frac{(1 - E[U_k])(z-1)\tilde{a}_k(z) - \tilde{u}_k(z)}{E[T_{k-1}](z - \tilde{u}_k(z)) - 1 - \tilde{a}_k(z)}, \quad (2.3)$$

ここで $T_0 = 1$.

X_k の分布を決定するには再生間隔の分布が必要である。 T_k の最初の間隔 T_k^* は

$$T_k^* = \begin{cases} \tau_k(1) & (\sum_{i=1}^{T_k-1} A_k(i) = 0) \\ \tau_k(1) + c & (\sum_{i=1}^{T_k-1} A_k(i) > 0, F_k) \\ \tau_k(1) + D_k(1) & (\sum_{i=1}^{T_k-1} A_k(i) > 0, F_k^c) \end{cases}$$

また T_k を T_k^* であらわすと

$$T_k = \begin{cases} T_k^* + \hat{T}_k & (\sum_{i=1}^{T_k-1} A_k(i) > 0, F_k^c) \\ T_k^* & (\text{その他}) \end{cases}$$

ここで $T_k \sim \hat{T}_k$ 。よって

補題 2.2 T_k の母関数 $g_k(z)$ は

$$\tilde{g}_k(z) = \frac{\tilde{g}_{k-1}^*(z)P_k^*}{1 - \tilde{g}_{k-1}^*(z)(1 - P_k^*)}, \quad (2.4)$$

$$\tilde{g}_k^*(z) = q_k^c(1 - z^c)\tilde{g}_{k-1}(z \cdot \tilde{a}_k(0)) + \tilde{\tau}_k(z)\{z^c q_k^c + (1 - q_k^c)\tilde{d}_k(z)\}, \quad (2.5)$$

$$P_k^* = q_k^c + \tilde{g}_{k-1}(\tilde{a}_k(0))(1 - q_k^c). \quad (2.6)$$

それぞれのモーメントを計算すると、 $E[X_k]$ が得られる。

2.1 合流条件を強めたモデル

次に合流条件を強めたモデルを考える。すなわち

$$T_k^* = \begin{cases} S_k(1) + D_k(1) & (\sum_{i=1}^{T_k-1} A_k(i) > 0, F_k^c) \\ S_k(1) + c & (\text{その他}) \end{cases}$$

これより

$$T_k = 1 + \sum_{l=1}^{M_k-2} (S_k(l) + D_k(l)) + (S_k(M_k - 1) - 1 + c)1(M_k \geq 2).$$

$$P(M_k = i) = \begin{cases} q_k & (i = 1) \\ (1 - q_k)(1 - q_k^c)^{i-2} q_k^c & (i \geq 2) \end{cases}$$

$$\nu_k(j) = \inf\{n > \nu_k(j-1); X_k(\nu_k(0)) = 0,$$

$$X_k(n) = 0, F_{k-1}(n) \text{ holds.}\},$$

$$S_k(l) = \nu_k(l) - \nu_k(l-1).$$

$$\tilde{s}_k(z) = E[z^{S_k}],$$

である。

系 2.1 T_k^c の母関数 $g_k^c(z)$ は

$$\tilde{g}_k^c(z) = \frac{(1 - q_k)q_k^c z^c \tilde{s}_k(z)}{1 - (1 - q_k^c)\tilde{s}_k(z)\tilde{d}_k(z)} + zq_k \quad (1 \leq k \leq N)$$

と計算できる。

同様に、モーメントを計算することで $E[X_k]$ を得る。

参考文献

- [1] P. Bremaud, *Markov Chains Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation and Queues*, Springer, 1998.
- [2] A. Cobham, priority assignment in waiting line problems, *operations research* 2 70-76, 1954.
- [3] H. Miura, Autumn meeting of the Operations Research Society of Japan, 64-65, 1997 (in Japanese).
- [4] Y. Takahashi, Delay analysis of discrete-time priority queue, *Queueing Systems* 8 149-164, 1991.
- [5] H. Takagi, Priority queues with batch Poisson arrivals, *Operatins Research Letters* 10 225-232, 1991.
- [6] H. Takagi, *Queueing Analysis, Volume 2: Finite Systems*, North-Holland, 1993.