

即時・待時混在系システムの階層的性能評価モデル

02103910 神奈川大学 *川西 俊之 KAWANISHI Toshiyuki
01102990 神奈川大学 紀 一誠 KINO Issei

1 はじめに

本稿では、即時系と待時系のプロセスが同一のハードウェアを使用するシステムを、2層型待ち行列網モデルを用いて解析をおこなう。このようなシステムの例として、受付と予約のプロセスが異なるチケット予約のシステムなどが考えられる。

また、2層型待ち行列網モデルは、階層的な資源競合がおこるシステムをモデル化するために [1, 2] で提案されている。

2 システムのモデル化

図1に示すような上位層に2つのプロセス、下位層に3つのノード(ハードウェア・リソース)をもつ2層型待ち行列網モデルを考える。

上位層: 上位層は以下の2つのプロセスから構成されている。

- プロセス1: 2つの窓口に着率 λ でランザクションが到着し、両窓口が使用中なら呼損となる。
- プロセス2: 待時系であり、バッファ容量は無限で先着順に処理をおこなう。

ランザクションは、プロセス1に到着し、呼損せずに処理が完了するとプロセス2に移動し処理を受け退去する。各プロセスを占有したランザクションは、下位層に降りてハードウェアを使用する。

下位層: プロセス1から降りてきたランザクションはCPUとDB1、プロセス2から降りてきたランザクションはCPUとDB2を交互に移動しながらリソース使用する。

ここで、プロセス1、プロセス2の系内ランザクション数を n_1, n_2 とし、プロセス1、プロセス2で処理中のランザクション数を k_1, k_2 とする。また、 $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ 、 $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ とする。ここで、 $k_1 = n_1, k_2 = \min(1, n_2)$ である。

3 下位層の計算

下位層にはプロセス1、プロセス2からそれぞれ、 k_1, k_2 のランザクションが降りてくる。また、どのプロセスから降りてきたかにしたがって、シングルプロファイル(リソース使用時間×使用回数)が決まりハードウェアを使用する(表1)。

下位層は以上のパラメータに依存した閉鎖型待ち行列網と考えることができる。これは積形式解をもち解析的に解くことができる。ここで求めた、スループット($\mu_i(\mathbf{k}), i = 1, 2$)を上位層におけるプロセス i のサービス率と考え、上位層を近似する。

4 上位層に関する状態方程式

下位層の待ち行列網を解くことにより求めた $\mu_i(\mathbf{k})$ を用いて上位層を構成する待ち行列網の計算をおこなう。

上位層の状態を \mathbf{n} で表現し状態を n_2 で分類する。このとき、 \mathbf{k} の取りうる値を考慮すると、状態推移行列は以下のような繰り返し構造となり、 n_2 をレベル、 n_1 をフェーズとした準出生死滅過程として表現できる。

$$Q = \left(\begin{array}{c|ccc} B_1 & C_0 & & O \\ \hline A_2 & A_1 & A_0 & \\ & A_2 & A_1 & A_0 \\ & & A_2 & \ddots & \ddots \\ O & & & \ddots & \end{array} \right)$$

ブロック行列を具体的にしめすと、

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mu_1(1,1) & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1(2,1) & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -a_1 & \lambda & 0 \\ 0 & -a_2 & \lambda \\ 0 & 0 & -a_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \lambda + \mu_2(0, 1), \\
a_2 &= \lambda + \mu_1(1, 1) + \mu_2(1, 1), \\
a_3 &= \mu_1(2, 1) + \mu_2(2, 1), \\
\mathbf{A}_2 &= \begin{pmatrix} \mu_2(0, 1) & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2(1, 1) & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2(2, 1) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

のようになる ($\mathbf{B}_1, \mathbf{C}_0$ は省略).

定常状態確率 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ について, 状態方程式 $\pi \mathbf{Q} = \mathbf{0}$ は,

$$\begin{aligned}
\pi_0 \mathbf{B}_1 + \pi_1 \mathbf{A}_2 &= \mathbf{0}, \\
\pi_0 \mathbf{C}_0 + \pi_1 \mathbf{A}_1 + \pi_2 \mathbf{A}_2 &= \mathbf{0}, \\
\pi_{n-1} \mathbf{A}_0 + \pi_n \mathbf{A}_1 + \pi_{n+1} \mathbf{A}_2 &= \mathbf{0}, \quad n \geq 2
\end{aligned}$$

のようになる. このとき, $\mathbf{A}_0 + \mathbf{R} \mathbf{A}_1 + \mathbf{R}^2 \mathbf{A}_2 = \mathbf{0}$ を満たす非負行列 \mathbf{R} を考えると, 上の差分方程式は

$$\pi_n = \pi_1 \mathbf{R}^{n-1}, \quad n \geq 2$$

という形の解を持つことがわかる. この \mathbf{R} を用いて状態方程式を解くことができる.

5 数値例

$h_1 = 10\text{ms}$, $h_2 = 6\text{ms}$, $w_1 = 5\text{ms}$, $w_2 = 3\text{ms}$ の場合について実際に計算をおこなった. その時にもとまった下位層でのスループットを表2に, 各リソースの利用率を図2にしめす.

6 まとめ

本稿では, 即時・待時混在系システムを2層型待ち行列網モデルでモデル化し解析をおこなった. 下位層, 上位層を分離して解く近似計算法を説明し, 数値例をしめした.

参考文献

- [1] Kino, I.: Two-Layer Queueing Networks, *JORSJ*, **40** (1997) 163–185.
- [2] Kurasugi, T. and Kino, I.: Approximation Methods for Two-Layer Queueing Models, *Perform. Eval.*, **36-37** (1999) 55–70.

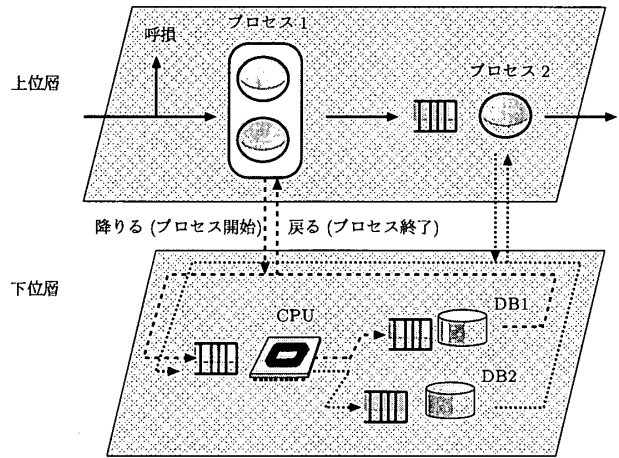


図1: 2層型待ち行列網モデル

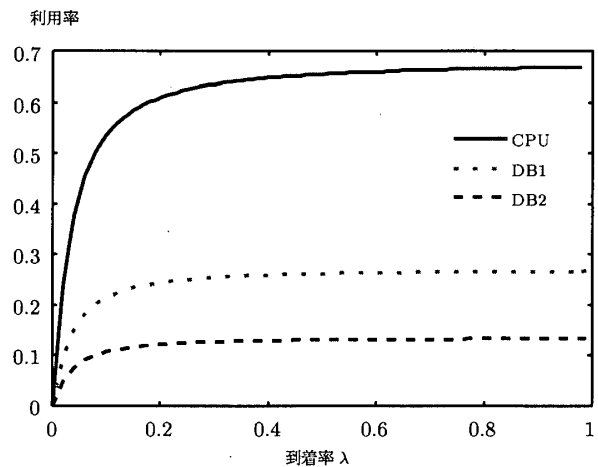


図2: 利用率 ($h_1 = 10$, $h_2 = 6$, $w_1 = 5$, $w_2 = 3$)

表1: 下位層のシングルプロファイル

リソース	プロセス1	プロセス2
CPU	h_1	w_1
DB1	h_2	0
DB2	0	w_2

表2: 下位層を解いて求めた $\mu_i(\mathbf{k})$

\mathbf{k}	$\mu_1(\mathbf{k})$	$\mu_2(\mathbf{k})$
(0, 0)	0.000000	0.000000
(0, 1)	0.000000	0.111111
(1, 0)	0.058824	0.000000
(1, 1)	0.044335	0.083744
(2, 0)	0.065806	0.000000
(2, 1)	0.050644	0.064449