日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

カルマンフィルタを用いたBassモデルにおける精度向上の研究

02401980　法政大学　*杉島　慎之輔　SUGISHIMA　Shinnosuke
01900070　法政大学　若山　邦紘　WAKAYAMA　Kunihiro

1．はじめに

予測をしても，実際の値と全く同じになることなど，まずない．しかし，実際の値に近づけることは可能である．

本稿では，新製品普及モデルとして使われているBassモデルに，時々刻々の予想値と観測値を比較してフィルタを更新し，誤差を修正していくアルゴリズムであるカルマンフィルタを当てはめる．これより，いかに実際の値に近い，精度の高い予測手法であるかを検証する．

2．Bassモデル

Bassモデルは，計画期間中は反復購入を無視できるような新製品（車，ビデオ，CDなどの耐久消費財）の普及過程を記述，予測するモデルである．
Bassモデルは，次の基本的仮定をもとにしている．

- 毎期の購入者は，自らの意思で購入決定する「革新者」と，普及の様子を見ながら購入決定する「模倣者」の２種類からなる．
- １人１台，または購入者数が購入台数を決定する．
- 革新者の購入確率は計画期間中一定(p)とする．
- t時点の模倣者の購入確率はt=0からt時点までの既購入確率に比例する．
- 潜在市場の大きさ(m)は計画期間中一定とする．

まず，t時点での初回購入確率$P(t)$は(1)式のように表される．

$$P(t)=p+q\frac{Y(t)}{m} \quad (1)$$

ここで，$Y(t)$はt時点までの累積売り上げ台数，mは潜在市場の大きさ，p=革新係数，q=模倣係数とする．基本的過程でも述べたように模倣者は潜在市場に対する既購入者の割合に正比例して購入確率が伸びる．それに革新者の一定確率pを加えてその時点の初期購入確率としている．

次に，期間(t，t+1)の間の購入者数，$S(t+1)=Y(t+1)-Y(t)$は(2)式のように表わされる．

$$S(t+1)=(m-Y(t))(p+q\frac{Y(t)}{m}) \quad (2)$$

3．カルマンフィルタ

時点tでのトレンドや季節性などに関する状態を表す変数$\mathbf{x}(t)$を推定，予測したいものとする．時点tから時点(t+1)への状態変化は，雑音$\mathbf{u}(t)$を考慮して状態（システム）方程式

$$\mathbf{x}(t+1)=F(t)\mathbf{x}(t)+G(t)\mathbf{u}(t) \quad (3)$$

で与えられるものとする[t=1，2，…，T]．時点tでの観測値$y(t)$は，トレンド成分$T(t)$と周期成分$S(t)$と雑音$w(t)$[分散ω^2]の和，すなわち観測方程式

$$\begin{aligned} y(t) &= T(t)+S(t)+w(t) \\ &= {}^{t}H(t)\mathbf{x}(t)+w(t) \quad (4) \end{aligned}$$

で表されるものとする．ここで$F(t)$，$G(t)$，$H(t)$は既知関数である．

このように，状態方程式と観測方程式で表現されるモデルを状態空間表現といい，カルマンフィルタは状態$\mathbf{x}(t)$を逐次的に推定するアルゴリズムである．

- トレンド成分は，変化は滑らかであることが予測を行う場合，望ましい．また，周期成分に関して，この制約を表現するために以下の式が成り立つものとする．また，この表現を滑らかなトレンドモデルと呼ぶ．

$$\begin{aligned} \nabla^2 &\equiv \{T(t)-T(t-1)\}-\{T(t-1)-T(t-2)\} \\ &= u(t) \quad (5) \end{aligned}$$

- 周期成分に関して，次式が成り立つものとする．

$$\sum_{i=0}^{s-1} S(t-1)=v(t) \quad (6)$$

ただし，$u(t)$，$v(t)$は互いに独立かつ平均0で，それぞれ分散σ_u^2，σ_v^2(未知)の正規性ホワイトノイズと仮定し，周期成分の周期はsとする．

このとき，

$$\mathbf{x}(t)=(T(t),T(t-1),S(t),\cdots,{}^tS(t-s-2)) \quad (7)$$

とおくと状態空間表現モデルにおける，$F(t)$，$G(t)$，$H(t)$，$\mathbf{u}(t)$，および $U(t)$ の共分散行列 $Q(t)$ は，

$$F(t)=\begin{bmatrix}2 & -1 & {}^t\mathbf{0}\\ 1 & 0 & {}^t\mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A\end{bmatrix}, G(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}{}^t(\mathbf{-1}) & -1\\ \boldsymbol{I} & \mathbf{0}\\ {}^t\mathbf{0} & 0\end{bmatrix}$$

$${}^t0=[0,0,\cdots,0], {}^t(-1)=[-1,-1,\cdots,-1], I:\text{単位行列}$$

$$H(t)={}^t(1.0.1.0,\cdots,0)$$

$$\mathbf{u}(t)={}^t(u(t),v(t)) \qquad Q=\begin{bmatrix}\sigma_u{}^2 & 0\\ 0 & \sigma_v{}^2\end{bmatrix} \quad (8)$$

となる．

推定すべきパラメータの $\Theta=(\omega^2,\ \sigma_u^2,\ \sigma_v^2)$ のうち，ω^2 は 1 とおくことができ，あとは最尤法を用いて推定できる．

また，$\{y(1),\ y(2),\ \cdots,\ y(t-1)\}$，$\mathbf{x}(0)$ および，Θ を与えたときの $y(t)$ の条件つき期待値 $y(t|t-1)$ とその誤差分散 $R(t|t-1)$ は，

$$y(t|t-1)={}^tH(t)\mathbf{x}(t|t-1) \quad (9)$$

$$R(t|t-1)={}^tH(t)P(t|t-1)H(t)+\omega^2 \quad (10)$$

で与えられる．$\mathbf{x}(t|t-1)$，$P(t|t-1)$ は $\mathbf{x}(0)$ と Θ が与えられると，以下のカルマンフィルタのアルゴリズムより求めることができる．

(時間更新)

$$\mathbf{x}(t|t-1)=F\mathbf{x}(t-1|t-1) \quad (11)$$

$$P(t|t-1)=FP(t-1|t-1){}^tF+GQ{}^tG \quad (12)$$

(観測値による修正)

$$\mathbf{x}(t|t)=\mathbf{x}(t|t-1)+K_t\{y(t)-{}^tH(t)\mathbf{x}(t|t-1)\} \quad (13)$$

$$P(t|t)=P(t|t-1)-K_t{}^tH(t)P(t|t-1)\} \quad (14)$$

$$K_t=\frac{P(t|t-1)H(t)}{{}^tH(t)P(t|t-1)H(t)+\omega^2} \quad (15)$$

ここで K_t は観測誤差を最小にするゲイン関数である．

(9)～(15)式より予測値 $y(t|t-1)$ を逐次，得ることができる．ここで初期値 $\mathbf{x}(0|0)$ は逆向きカルマンフィルタより推定することができる．その際，状態ベクトルは，

$$\mathbf{x}(t)=(T(t),T(t+1),S(t),\cdots,S(t+s-2)) \quad (16)$$

としなければならない．

4．Bass モデルにカルマンフィルタを適応する

今回は(2)式をカルマンフィルタにおけるトレンド項を $T(t)$ として近似することにする．(2)式の左辺を差分で表現し，右辺の時点調整を行うと，

$$T(t-1)-T(t)=\{m-T(t-1)\}\{p_1+({}^{q_1}\!/_{m})T(t)\} \quad (17)$$

と表せる．ここで，

$$c_{t-1}=m-T(t-1) \quad (18)$$

と置き換えると，

$$T(t+1)=\{1+({}^{q_1}\!/_{m})c_{t-1}\}T(t)+p_1c_{t-1} \quad (19)$$

となる．次に，初期値を求めるために，逆向きカルマンフィルタのシステムも，

$$T(t)-T(t-1)=\{m-T(t+1)\}\{p_2+({}^{q_2}\!/_{m})T(t)\} \quad (20)$$

と変更し，

$$T(t-1)=\{1-({}^{q_2}\!/_{m})c_{t+1}\}T(t)-p_2c_{t+1} \quad (21)$$

とする．また，(8)式の $F(t)$ を，

$$\text{順方向}\cdots F(t)=\begin{bmatrix}1+(q_1/m)c_{t-1} & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\text{逆方向}\cdots F(t)=\begin{bmatrix}1-(q_2/m)c_{t+1} & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad (23)$$

と用いる．また，(19)，(21)式における右辺第２項は，

$$\mathbf{x}(t+1)=F(t)\mathbf{x}(t)+C(t)+G(t)U(t) \quad (24)$$

$${}^tC(t)=(d_t,0,0,\cdots,0) \quad (25)$$

$$(19)\text{式}\cdots d_t=p_1c_{t-1} \quad (26)$$

$$(21)\text{式}\cdots d_t=-p_2c_{t+1} \quad (27)$$

とおく．

詳しい実験結果，考察は当日発表させていただく．

参考文献

[1]上田徹「予測手法(1)：時系列予測法」オペレーションズ・リサーチ(1994.6)

[2]片平秀貴「マーケティング・サイエンス」東京大学出版会(1987)