日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

償還条項付き転換社債の価格の分解と最適境界について

02702073 南山大学 ＊八木 恭子 YAGI Kyoko
02202983 南山大学 瀬古 進 SEKO Susumu
01202653 南山大学 澤木 勝茂 SAWAKI Katsushige

1 はじめに

償還条項付き転換社債 [1], [3] とは, 投資家 (買い手) に満期までの任意の時刻で転換社債を株式に転換できる権利を与え, さらに企業 (売り手) にも満期までの任意の時刻で転換社債を償還できる権利を与えた条件付き請求権である. ただし, 企業が償還したとき, 投資家はその時刻で転換社債を株式へ転換するか, 企業に償還価格で買い戻されるかを選択することができる.

本稿では, 投資家の最適な転換境界と企業の最適な償還境界の定性的な性質を示し, 転換社債の価格が通常の社債とヨーロピアンコールオプション, 早期転換プレミアムとの和から早期償還ディスカウントを引いたものに分解できることを示す.

2 モデル

時刻 t における企業価値 V_t は, 転換社債の総価値 $CB(t,V_t)$ と株価 S_t との和からなるとする. すなわち

$$V_t = CB(t,V_t) + S_t \tag{1}$$

である. $CB(t,V_t)$ は満期 T をもち, T における額面総額は F とする. 時刻 t で投資家が転換したときの価値は, zV_t である. ただし, $z \in (0,1)$ は転換のときに受け取る企業価値に対する転換率であり, 希薄化因子である. 企業の償還価格を F とする. すなわち, 時刻 t で企業が償還したとき, 投資家に $\max(zV_t, F)$ を支払う.

償還条項付き転換社債の価格は

$$zV_t \le CB(t,V_t) \le \max(zV_t, F) \tag{2}$$

を満たす.

取引期間を有界な閉区間 $[0,T]$ とする. (1) 式で与えた企業価値の変動をリスク中立確率測度 $\tilde{P}$ の下で確率微分方程式

$$dV_t = (r-\delta)V_t dt + \kappa V_t d\tilde{Z}_t \tag{3}$$

で与える. ただし, r, κ はそれぞれは無危険利子率とボラティリティ, δ は配当の支払いにおける企業価値に対する配当率であり, 定数とする. 確率過程 $\{\tilde{Z}_t; t \le T\}$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \tilde{P})$ 上で定義される標準ブラウン運動である.

時刻 t から満期 T までの停止時刻の集合を $\mathcal{T}_{t,T}$ とする. 投資家の停止時刻を $\tau \in \mathcal{T}_{0,T}$, 企業の停止時刻を $\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}$ とすると, 時刻 $\tau \wedge \sigma$ において, 企業の投資家への支払い額 $R(\sigma,\tau)$ は

$$R(\sigma,\tau) = \max(zV_\sigma, F)1_{\{\sigma<\tau\}} + zV_\tau 1_{\{\tau\le\sigma\}} \tag{4}$$

となる. $\tau = \sigma$ のときは投資家の権利が優先されるとする. また, 満期 T では, 投資家は株に転換するか, 額面総額を受け取るか選択することができる. ただし, 企業価値が額面総額以下ならば, 企業価値を受け取る. よって

$$CB(T,V_T) = \min(V_T, \max(zV_T, F)) \tag{5}$$

となる.

定理 1 償還条項付き転換社債の価格 $CB(t,v)$ は

$$\begin{aligned} CB(t,v) &= \inf_{\sigma\in\mathcal{T}_{t,T}} \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}} J_t^v(\sigma,\tau) \\ &= \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}} \inf_{\sigma\in\mathcal{T}_{t,T}} J_t^v(\sigma,\tau) \end{aligned} \tag{6}$$

で与えられる. ただし,

$$\begin{aligned} J_t^v(\sigma,\tau) = \tilde{E}\Big[& e^{-r(\sigma\wedge\tau\wedge T-t)}\big(R(\sigma,\tau) \\ & + \min(V_T, \max(zV_T, F))1_{\{\sigma=T,\tau=T\}}\big) \,|V_t = v\Big] \end{aligned} \tag{7}$$

であり, 投資家と企業の最適な停止時刻は

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_t &= \inf\{\tau \in [t,T) \mid CB(\tau, V_\tau) = zV_\tau\} \\ \hat{\sigma}_t &= \inf\{\sigma \in [t,T) \mid CB(\sigma, V_\sigma) = \max(zV_\sigma, F)\} \end{aligned} \tag{8}$$

で与えられる.

3 最適な転換および償還境界

企業と投資家の停止領域をそれぞれ, $\mathcal{S}^f$, $\mathcal{S}^i$ とし, 両者の継続領域を $\mathcal{C}$ とすると

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^f &= \{(t,v) \mid CB(t,v) = \max(zv, F)\} \\ \mathcal{S}^i &= \{(t,v) \mid CB(t,v) = zv\} \\ \mathcal{C} &= \{(t,v) \mid zv < CB(t,v) < \max(zv, F)\} \end{aligned}$$

となる．また，償還条項のない転換社債の価格を $\overline{CB}(t,v)$ とする．そのとき，投資家の停止領域と継続領域はそれぞれ

$$\overline{\mathcal{S}}^i = \{(t,v) \mid \overline{CB}(t,v) = zv\}$$
$$\overline{\mathcal{C}} = \{(t,v) \mid \overline{CB}(t,v) > zv\}$$

となる．また，各領域での時刻 t での切り口をそれぞれ $\mathcal{S}_t^f$, $\mathcal{S}_t^i$, $\mathcal{C}_t$ および $\overline{\mathcal{S}}_t^i$, $\overline{\mathcal{C}}_t$ であらわす．

補題 2 償還条項付き転換社債 $CB(t,v)$ と償還条項のない転換社債 $\overline{CB}(t,v)$ は

$$CB(t,v) \le \overline{CB}(t,v), \quad \mathcal{S}_t^i \supseteq \overline{\mathcal{S}}_t^i \tag{9}$$

を満たす．

定理 3 償還条項付き転換社債に対する投資家の最適転換境界を v_t^i, 企業の最適償還境界を v_t^f, $v_t^* = \min(v_t^i, v_t^f)$ とし，償還条項のない転換社債の最適転換境界を $\overline{v}_t^i$ とすると $\mathcal{S}_t^i = [v_t^i, \infty)$, $\mathcal{S}_t^f = [v_t^f, \infty)$, $\mathcal{C}_t = [0, v_t^*)$ および $\overline{\mathcal{S}}_t^i = [\overline{v}_t^i, \infty)$, $\overline{\mathcal{C}}_t = [0, \overline{v}_t^i)$ が成立する．さらに，$v_t^i \le \overline{v}_t^i$ と $v_t^f \le F/z$ が成立する．

4 転換社債の価格の分解

Ingersoll[2] は，株式に配当の支払いがない場合，投資家は満期以外では転換しないのが最適であり，転換社債にクーポンの支払いがないような償還条項のない転換社債は，通常の社債とヨーロピアンコールオプションとの和で表現できると示した．すなわち，株式に配当の支払いがある場合，償還条項のない転換社債は通常の社債 B とアメリカンコールオプション $\overline{C}$ との和となる．

定理 4 償還条項のない転換社債 $\overline{CB}(t,v)$ は

$$\begin{aligned}\overline{CB}(t,v) &= B(t,v) + \overline{C}(t, zv; B(t,v)) \\ &= B(t,v) + C_e(t, zv; B(t,v)) + \overline{p}(t,v)\end{aligned} \tag{10}$$

と分解される．ただし，$C_e(t, zv; B(t,v))$ は行使対象が z 単位の企業価値であり，権利行使価格が社債のヨーロピアンコールオプションであり，$\overline{p}(t,v) \ge 0$ は早期転換におけるプレミアムで，

$$\overline{p}(t,v) = \tilde{E}\left[\int_t^T e^{-r(s-t)} \delta z V_s 1_{\{\overline{v}_s \le V_s\}} ds \middle| V_t = v\right]$$

である．

償還条項付き転換社債も同様の分解をすることができる．

補題 5 転換オプション $C(t,v)$ は v について凸関数である．

定理 6 償還条項付き転換社債 $CB(t,v)$ は

$$\begin{aligned}CB(t,v) &= B(t,v) + C(t,v) \\ &= B(t,v) + C_e(t, zv; B(t,v)) \\ &\quad + p(t,v) - d(t,v),\end{aligned} \tag{11}$$

$$p(t,v) = \tilde{E}\left[\int_t^T e^{-r(s-t)} \delta z V_s 1_{\{v_s^* \le V_s\}} ds \middle| V_t = v\right],$$

$$d(t,v) = \tilde{E}\left[\int_t^T e^{-r(s-t)} \left(\frac{\partial C}{\partial V}(s, v_s^{*+}) - \frac{\partial C}{\partial V}(s, v_s^{*-})\right) dL_s^v(v_s^*) \middle| V_t = v\right]$$

と分解される．ただし，$p(t,v) \ge 0$ と $d(t,v) \ge 0$ はそれぞれ早期転換プレミアムと早期償還ディスカウントであり，$L_t^v(v_t^*)$ は点 v_t^* における V_t の局所時間である．

系 7 償還条項付き転換社債と償還条項のない転換社債の早期転換プレミアムは

$$p(t,v) \le \overline{p}(t,v) \tag{12}$$

が成立する．

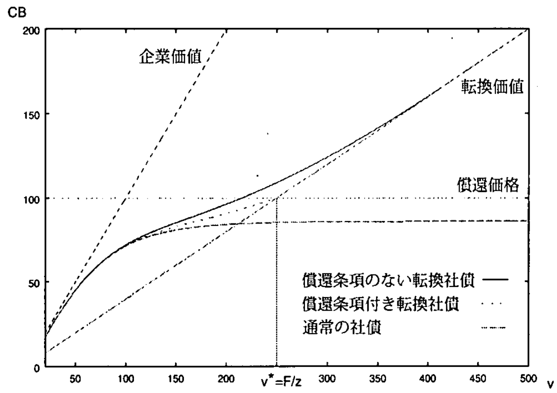

図 1 転換社債の価格

額面総額 $F = 100$, 無危険利子率 $r = 0.05$, ボラティリティ $\kappa = 0.3$, 配当率 $\delta = 0.02$, 希薄化因子 $z = 0.4$, 満期 $T = 3$

参考文献

[1] M. J. Brennan and E. S. Schwartz (1977), "Convertible Bonds: Valuation and Optimal Strategies for Call and Conversion", *The Journal of Finance*, **32**, pp.1699-1715.

[2] J. E. Ingersoll (1977), "A Contingent-Claims Valuation of Convertible Securities", *Journal of Financial Economics*, **4**, pp.289-322.

[3] 八木 恭子, 澤木 勝茂 (2004), "償還条項付き転換社債の評価について", 南山学会数理情報系列テクニカルレポート, NANZAN-TR-2004-02.