日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

ゲームプットオプションの解析的性質について

02202983　南山大学　* 瀬古 進　SEKO Susumu
02203113　南山大学　鈴木 淳生　SUZUKI Atsuo
01202653　南山大学　澤木 勝茂　SAWAKI Katsushige

1　はじめに

本研究では，ゲームプットオプションの解析的な性質について言及する．[3] は危険資産価格が権利行使価格に達したとき，売り手は権利行使するのが最適であることを推測している．我々は永久ゲームプットの結果 [4] からそれを解析的に導出する．また，ゲームプット価格が分解できることを述べる．

2　最適停止問題としてのゲームプット

取引期間を有界な閉区間 $[0,T]$ とし，危険資産と無危険資産の 2 種類の資産が取引される資産市場を想定する．無危険資産の価格を B_t とすると，B_t は

$$dB_t = rB_t dt,\ B_0 > 0,\ r \geq 0$$

となる．ただし，r は無危険利子率であり，定数とする．危険資産の価格を X_t とすると，X_t の挙動はリスク中立測度 $\tilde{P}$ の下で確率微分方程式

$$dX_t = rX_t dt + \kappa X_t d\tilde{W}_t$$

にしたがうとする．ただし，κ は危険資産価格のボラティリティであり，定数とする．確率過程 $\{\tilde{W}_t :\ 0 \leq t \leq T\}$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \tilde{P})$ 上で定義される標準ブラウン運動である．また，危険資産からの配当はないものとする．

ゲームプットオプションとは，満期までの任意の時刻において，オプションの売り手は契約をキャンセルすることができ，買い手は権利を行使することのできる契約である．任意の時刻 t において，買い手が権利を行使する前に売り手がキャンセルしたとき，売り手は買い手に $(K-X_t)^+ + \delta$ を支払わなければならない．δ は売り手が契約を早期にキャンセルすることによるペナルティであり，$\delta \geq 0$ である．売り手がキャンセルする前に買い手が権利行使したときには，売り手は買い手に $(K-X_t)^+$ だけ支払う．ただし，売り手と買い手が同時に権利行使したとき，買い手の権利行使が優先されると仮定する．時刻 t から T までの停止時刻の集合を $\mathcal{T}_{tT}$ とする．売り手の停止時刻を σ，買い手の停止時刻を τ とすると，ゲームプットのペイオフは

$$R(\sigma,\tau) = ((K-X_\sigma)^+ + \delta)\mathbf{1}_{\{\sigma<\tau\}} + (K-X_\tau)^+\mathbf{1}_{\{\tau\leq\sigma\}}$$

となる．

注 1　売り手がキャンセルしないのが最適であるとき $(\sigma = \infty)$，ゲームプットは，買い手のみが権利行使できるアメリカンプットに退化する．売り手はキャンセルしないのが最適であり $(\sigma = \infty)$，かつ買い手は満期まで権利行使しないのが最適ならば $(\tau = T)$，ヨーロピアンプットに退化する．

本研究では，ゲームプット，アメリカンプット，永久ゲームプットおよび永久アメリカンプットの価格を比較して考える．アメリカンプットの価格を $V^a(x,t)$ とすると，

$$V^a(x,t) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{tT}} \tilde{E}[e^{-r(\tau-t)}(K-X_\tau)^+ | X_t = x]$$

である．ただし，$\tilde{E}$ はリスク中立測度 $\tilde{P}$ の下での期待値である．最適な停止時刻は

$$\tau_t^a = \inf\{\tau \geq t :\ V^a(X_\tau,\tau) \leq (K-X_\tau)^+\} \wedge T$$

で与えられる．$V^a(x,t)$ は連続で，x と t に関して非増加であり，x について凸である [1]．また $V^a(x,t)$ は

$$V^a(x,t) \geq (K-x)^+,\ \forall(x,t) \in \mathbf{R}^+ \times [0,T]$$

を満たし，停止領域 $\mathcal{S}^a$ と継続領域 $\mathcal{C}^a$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^a &= \{(x,t) :\ V^a(x,t) = (K-x)^+\} \\ \mathcal{C}^a &= \{(x,t) :\ V^a(x,t) > (K-x)^+\} \end{aligned}$$

で与えられる．さらにアメリカンプットの最適行使境界を x_t^a とすると，x_t^a は t について非減少であり，$\lim_{t\to T} x_t^a = K$ を満たす．

次の定理はゲームプットの無裁定価格であり，[2] によって与えられた．

定理 (Kifer)　ゲームプットの価格 $V(x,t)$ は

$$\begin{aligned} V(x,t) &= \inf_{\sigma\in\mathcal{T}_{tT}} \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{tT}} J_t^x(\sigma,\tau) \\ &= \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{tT}} \inf_{\sigma\in\mathcal{T}_{tT}} J_t^x(\sigma,\tau) \end{aligned}$$

で与えられる．ただし，

$$J_t^x(\sigma,\tau) = \tilde{E}\left[e^{-r(\sigma\wedge\tau-t)}R(\sigma,\tau)\middle| X_t = x\right]$$

であり，最適な停止時刻は

$$\begin{aligned} \sigma_t^* &= \inf\{\sigma \geq t :\ V(X_\sigma,\sigma) \geq (K-X_\sigma)^+ + \delta\} \wedge T \\ \tau_t^* &= \inf\{\tau \geq t :\ V(X_\tau,\tau) \leq (K-X_\tau)^+\} \wedge T \end{aligned}$$

で与えられる．

3 ゲームプットの解析的性質

ゲームプット価格は

$$(K-x)^+ \le V(x,t) \le (K-x)^+ + \delta$$

を満たす[*1]. 売り手の停止領域 $\mathcal{S}^A$, 買い手の停止領域 $\mathcal{S}^B$ および両者の継続領域 $\mathcal{C}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^A &= \{(x,t) : V(x,t) = (K-x)^+ + \delta\} \\ \mathcal{S}^B &= \{(x,t) : V(x,t) = (K-x)^+\} \\ \mathcal{C} &= \{(x,t) : (K-x)^+ < V(x,t) < (K-x)^+ + \delta\}\end{aligned}$$

となる. ゲームプットとアメリカンプットの各領域の時刻 t での切り口をそれぞれ $\mathcal{S}_t^A$, $\mathcal{S}_t^B$, $\mathcal{C}_t$ および $\mathcal{S}_t^a$, $\mathcal{C}_t^a$ であらわす. 例えば, $\mathcal{S}_t^A = \{x : (x,t) \in \mathcal{S}^A\}$ である. また, 時刻 t における買い手の最適行使境界を x_t^B とする. 以下の補題は定理 4 を証明するために用いる.

補題 (Kühn and Kyprianou) 1) $V(x,t)$ は連続であり, x に関して非増加, t に関して非増加である.

2) $V(x,t)$ は x について凸関数である.

補題 2 ゲームプット $V(x,t)$, アメリカンプット $V^a(x,t)$, 永久ゲームプット $V_\infty(x)$, 永久アメリカンプット $V_\infty^a(x)$ は次の関係を満たす.

$$\begin{aligned}V(x,t) \le V^a(x,t) \le V_\infty^a(x),\ \forall (x,t) \in \mathbf{R}^+ \times [0,T], \\ V(x,t) \le V_\infty(x) \le V_\infty^a(x),\ \forall (x,t) \in \mathbf{R}^+ \times [0,T].\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_t^B \supseteq \mathcal{S}_t^a \supseteq \mathcal{S}_\infty^a,\ \forall t \in [0,T] \\ \mathcal{S}_t^A \subseteq \mathcal{S}_\infty^A,\ \forall t \in [0,T]\end{aligned}$$

が成立する.

補題 3 1) $\mathcal{S}_t^B = [0, x_t^B]$ が成立する. x_t^B は t について非減少であり, $\lim_{t\to T} x_t^B = K$ を満たす. アメリカンプットの最適行使境界を x_t^a とすると, $x_t^B \ge x_t^a$ が成立する.

2) $d \equiv \sup\{t \ge 0 \mid \delta \le V^a(K,t)\}$ とする. $t \in [0,d]$ ならば, $\mathcal{S}_t^A = \{K\}$, $x_t^B > x_t^a$ となる. $t \in (d,T]$ ならば, $\mathcal{S}_t^A = \phi$, $x_t^B = x_t^a$ となる. また $t \in (d,T]$ のとき, $V(x,t) = V^a(x,t)$ が成立する.

3) $t \in [0,d]$ のとき, $\mathcal{C}_t = (x_t^B, K) \cup (K, \infty)$ であり, $t \in (d,T]$ のとき, $\mathcal{C}_t = (x_t^B, \infty)$ である.

定理 4 1) $x_t^a \le x_t^B \le K$ かつ $\lim_{t\to T} x_t^B = K$ を満たす非減少関数 $\{x_t^B, t \in [0,T]\}$ が存在して,

$$\mathcal{S}^B = \{(x,t) \in \mathbf{R}^+ \times [0,t] : 0 \le x \le x_t^B\},\ \mathcal{S}_t^B = [0, x_t^B]$$

である.

2)

$$\mathcal{S}^A = \{(K,t) : t \in [0,d]\},\ \mathcal{S}_t^A = \begin{cases} \{K\}, & t \in [0,d] \\ \phi, & t \in (d,T] \end{cases}$$

が成立する. さらに $t \in (d,T]$ のとき, $V(x,t) = V^a(x,t)$ が成立する. $\delta > V^a(K,t)$ のとき, $d = 0$ となり, すべての t で $\mathcal{S}_t^A = \phi$ となり, ゲームプットはアメリカンプットに退化する.

定理 5

$$\lim_{x \to x_t^B} \frac{\partial V}{\partial x} = -1$$

が成立する.

定理 6 ゲームプットの価格は

$$\begin{aligned}V(x,t) &= V^e(x,t) + e(x,t) - c(x,t), \\ e(x,t) &= \tilde{E}\left[\int_t^T e^{-r(s-t)} rK \mathbf{1}_{\{X_s \le x_s^B\}} dt \,\middle|\, X_t = x\right], \\ c(x,t) &= \tilde{E}\left[\int_t^d e^{-r(s-t)} \left(\frac{\partial V}{\partial x}(K^+, s) - \frac{\partial V}{\partial x}(K^-, s)\right) dL_s^x(K) \,\middle|\, X_t = x\right]\end{aligned}$$

のように分解される. ただし, $V^e(x,t)$ はヨーロピアンプットの価格であり, $e(x,t) \ge 0$ と $c(x,t) \ge 0$ はそれぞれ早期行使プレミアムと早期キャンセルディスカウントであり, $L_t^x(K)$ は点 K における X_t の局所時間である.

注 7 アメリカンプットの早期行使プレミアムを $e^a(x,t)$ とすると, $t \in [0,d]$ のとき $e(x,t) > e^a(x,t)$ となり, $t \in (d,T]$ のとき $e(x,t) = e^a(x,t)$ となる.

4 数値例

発表当日に提示する.

5 まとめ

本研究では, 時刻 d まで売り手の最適行使境界が存在し, それが権利行使価格と等しいことを示した. 買い手の最適行使境界はアメリカンプットの最適行使境界よりも常に上にあることも示した. また, ゲームプット価格が分解できることを示した.

参考文献

[1] Karatzas, I. and Shreve S., *Methods of Mathematical Finance*, Springer, New York, 1998.

[2] Kifer, Y., "Game Options", *Finance and Stochastics*, **4**, 443-463, 2000.

[3] Kühn, C. and Kyprianou, A.E., "Israeli options as composite exotic options", 2004, *Preprint*.

[4] Kyprianou, A.E., "Some Calculations for Israeli options", *Finance and Stochastics*, **8**, 73-86, 2004.

[*1] $(K-x)^+ > V(x,t)$ および $V(x,t) > (K-x)^+ + \delta$ が成立するとき, 裁定機会が存在することを示せばよい.