日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

経路依存型アメリカンオプションの価格評価

三菱証券 ＊藤原　哉 FUJIWARA Hajime
01106850 京都大学 経済学研究科 木島　正明 KIJIMA Masaaki

1 はじめに

本研究では、経路依存型アメリカンオプションの一種である "Anytime Bermudan" オプションの価格をモンテカルロ・シミュレーションにより評価する方法を示す。

$0 < T_1 < T_2$ の3時点を考える。Anytime Bermudan オプションでは時刻 T_2 で発生するキャッシュ・フローが時点 T_1 での状態に依存し、かつ区間 $[T_1, T_2]$ の任意の時点で権利行使が可能である。よって、時点 $\tau \in [T_1, T_2]$ で権利行使の判断をするためには、時点 τ での状態だけでなく、時点 T_1 での状態も考慮しなければならない。このことから Anytime Bermudan 型オプションは経路依存型アメリカンオプションであることがわかる。Anytime Bermudan 型の商品例としては、任意の時点で早期償還可能な変動利付債券がある。 Anytime Bermudan オプションの価格は離散時間近似によりダイナミック・プログラミングで定式化できる。Anytime Bermudan オプションの場合には、ダイナミック・プログラミングでの続行価値は2時点に依存する条件付期待値となる。一般にダイナミック・プログラミングには解析解が存在せず、数値的に解く必要がある。そのため続行価値である2時点に依存する条件付期待値の数値的な評価が問題となる。

通常のアメリカンオプションの価格評価では、ダイナミック・プログラミングでの続行価値は1時点に依存する条件付期待値となる。この1時点に依存する条件付期待値を数値的に評価する方法が多く提案されている ([4])。そのうちの一つに、マリアバン解析を用いて1時点に依存する条件付期待値を無条件期待値で表現し、モンテカルロ・シミュレーションで評価する方法がある ([1],[2],[3],[5])。

本研究では、[5] の手法を拡張することにより2時点に依存する条件付期待値を無条件期待値で表現し、モンテカルロ・シミュレーションで評価できることを示す。

2 モデル

状態変数 X が存在し次の確率微分方程式に従うとする。

$$\begin{aligned} dX_t &= b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \qquad (1) \\ X_0 &= x \end{aligned}$$

瞬間的無リスク金利が存在し、$r = r(X_t)$ とする。

Anytime Bermudan オプションのキャッシュフロー発生時刻を $\{T_1 < \cdots < T_i < \cdots < T_N = T\}$ とする。時刻 T_i に発生するキャッシュフロー CF_i は時刻 T_{i-1} での状態に依存するので $CF_i = CF_i(X_{T_{i-1}})$ とする。オプションの権利行使価値を $h(X_\tau, X_{T_i})$ とする。但し、τ は権利行使時点、T_i は権利行使時点 τ の直前のキャッシュフロー発生時刻である。Anytime Bermudan オプションの価値を V とする。$\mathcal{T}$ を $[t, T]$ での停止時刻の集合とすると時刻 t での価値は次のようになる。

$$\begin{aligned} V_t &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathrm{E}\left[e^{-\int_t^\tau r(X_s)ds} h(X_\tau, X_{T_{i-1}})\right] \qquad (2) \\ T_{i-1} &\leq \tau < T_i \end{aligned}$$

キャッシュフロー発生時刻の区間 $[T_{i-1}, T_i]$ を $T_{i-1} = t_0 < \cdots < t_M = T_i$ と離散近似を用いると、(2) はダ

イナミック・プログラミングで解くことができる。時刻 $t_j \in [T_{i-1}, T_i]$ での Anytime Bermudan オプションの価値を $V_{t_j}(X_{t_j}, X_{T_{i-1}})$ とし、満期 T_N でのオプションのペイオフを $h_{T_N}(X_{T_N})$ とすると次のようになる。

$$V_{t_M}(X_{t_M}, x) = h_T(X_T) + CF_{T_N}(x) \tag{3}$$

$$V_{t_M}(X_{t_M}, x) = V_{T_i}(X_{T_i}, X_{T_i}) + CF_{T_i}(x),\ i = 1, \cdots, N-1 \tag{4}$$

$$V_{t_j}(X_{t_j}, x) = \max[h(X_{t_j}, x), CV_{t_j}] \tag{5}$$

$$CV_{t_j} = \mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{-r(X_{t_j})(t_{j+1}-t_j)} V_{t_{j+1}}(X_{t_{j+1}}, x) | X_{t_j} = y, X_{T_{i-1}} = x\right]$$

(3) は満期 $T = T_N$ でのオプション価値、(4) は満期以外でのキャッシュフロー発生時刻 $(T_1 < \cdots < T_{N-1})$ でのオプション価値、(5) は時点 $t_j \in (T_{i-1}, T_i), i = 1, \cdots, N$ でのオプション価値を表している。また (5) での CV_{t_j} は続行価値を表している。

(3),(4),(5) は数値的に評価しなければならない。続行価値 CV_{t_j}、つまり 2 時点に依存する条件付期待値のモンテカルロ・シミュレーションでの評価が問題となる。

3 マリアバン解析による続行価値の評価

続行価値を簡単のため次のように表記する。

$$\mathrm{E}[f(X_{t_3}, x) | X_{t_1} = x, X_{t_2} = y] \tag{6}$$

マリアバン解析の結果を用いると (6) は次のように表現される

$$E[f(X_{t_3}, x) | X_{t_1} = x, X_{t_2} = y] = \frac{\mathrm{E}[f(X_{t_3}, x)\delta_x(X_{t_1})\delta_y(X_{t_2})]}{\mathrm{E}[\delta_x(X_{t_1})\delta_y(X_{t_2})]} \tag{7}$$

$$= \frac{\mathrm{E}[H_x(X_{t_1})H_y(X_{t_2})f(X_{t_3}, x)S^g \circ S^h(\varphi(X_{t_1} - x)\psi(X_{t_2} - y))]}{E[H_x(X_{t_1})H_y(X_{t_2})S^g \circ S^h(\varphi(X_{t_1} - x)\psi(X_{t_2} - y))]}$$

$\delta_x(\cdot)$ はデルタ関数、$H_x(\cdot)$ はヘビサイドの階段関数である。$S(\cdot)$ はF を任意の確率変数、h_t^i を行列値関数 h_t の第 i 列ベクトルとすると次のように定義される。

$$S_i^h(F) \equiv \int_0^{t_3} F h_t^i \cdot dW_t$$

$$S^h(F) \equiv S_{1,\ldots,d}^h(F) \equiv S_1^h \circ S_2^h \circ \cdots \circ S_d^h(F)$$

ただし、$x, y \in R^d$ にたいして $x \cdot y = \sum_{i=1}^d x_i y_i$、$f, g : R \mapsto R$にたいして、$f \circ g(x) = f(g(x))$ である。$\varphi(\cdot), \psi(\cdot)$ は $R \mapsto R$ で (7) の右辺の分母の分散を最小とする関数である (局所化関数)。g, h は次の条件を満たす行列値関数である。

$$\int_0^{t_3} D_t X_{t_1} g_t dt = 0,\ \int_0^{t_3} D_t X_{t_2} g_t dt = I_d,\ \int_0^{t_3} D_t X_{t_3} g_t dt = 0$$

$$\int_0^{t_3} D_t X_{t_1} h_t dt = I_d,\ \int_0^{t_3} D_t X_{t_2} h_t dt = 0,\ \int_0^{t_3} D_t X_{t_3} h_t dt = 0$$

D_t はマリアバン微分[1]、I_d は d 次元の恒等行列である。

(7) の右辺はモンテカルロ・シミュレーションで評価可能であり、これを (5) での続行価値の評価に適用することができる。

参考文献

[1] V.Bally, L.Caramellino, A.Zanette, " Pricing and hedging American options by Monte Carlo methods using a Malliavin calculus approach", *working paper*, 2003

[2] B.Bouchard, I.Ekeland, N.Touzi, "On the Malliavin approach to Monte Carlo approximation of condtional expectations", *working paper*, 2003

[3] E.Fournie, J.Lasry, J.Lebuchoux, P.Lions, "Applications of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance. ", *Finance and Stochastics* **5**, 2001

[4] P.Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, 2003

[5] M.Mrad, N.Touzi, A.Zeghal, "Monte Carlo estimation of a joint density using Malliavin Calculus", *working paper*, 2003

[6] D.Nualart, *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Springer-Verlag, 1995

1 マリアバン微分については [6] を参照