

数値実験を用いた多期間ポートフォリオ最適化モデルの比較

01505910 慶應義塾大学 * 枇々木 規雄 HIBIKI Norio

1 はじめに

年金基金などの長期的な資産運用を行う投資家にとって、多期間にわたる不確実性を考慮した動的投資政策の決定を「明示的に」モデル化するためには、1期間モデルではなく、多期間モデルを構築する必要がある。実際に多期間確率計画問題を解くためのモデルとして、中心となって発展しているのはシナリオ・ツリー型モデルである([4, 6])。一方、モンテカルロ・シミュレーションをベースとしたシミュレーション/ツリー混合型モデルも枇々木[3]によって提案されている¹。本研究では、混合型モデルの投資比率決定戦略の計算アルゴリズムおよび2種類のモデルの比較方法も提案し、この2種類のモデルを数値実験を用いて比較する。

2 シナリオ・ツリー型モデルと混合型モデル

2.1 モデルの特徴

シナリオ・ツリー型モデルは図1(左)のようなシナリオ・ツリーを、混合型モデルは図1(右)のようなシミュレーション経路を用いて最適投資決定を行うモデルである。混合型モデルは各時点で似た状態(経路)をバンドリングし、それらに対して同じ意思決定を行う。紙面の都合上、具体的な定式化は枇々木[1]を参照されたい。

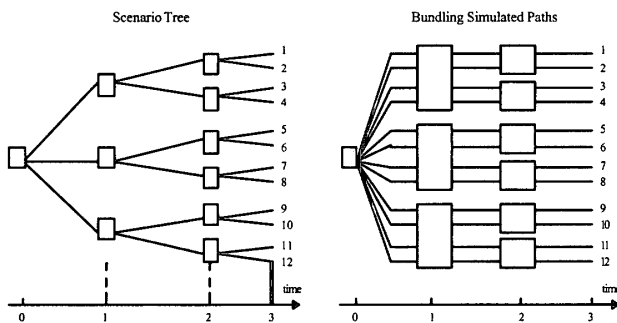


図 1: シナリオ・ツリーとシミュレーション経路

2.2 決定変数と投資戦略

◇ シナリオ・ツリー型モデル

決定変数を投資比率、投資額、投資量(投資単位)のいずれかに設定しても得られる最適解は同じである。

◆ 混合型モデル

決定変数に何を設定するかによって、投資戦略が異なる。

¹混合型モデルに関する詳細な分析については Hibiiki[2]を参照されたい。

り、最適解も異なる。投資量関数 $h^{(i)}(z_{jt}^s) = a_{jt}^{(i)} z_{jt}^s$ を用いて、状態(経路 i)ごとに投資量 $h^{(i)}(z_{jt}^s)$ を変え、投資戦略を表現する。

- 投資量決定戦略: $h^{(i)}(z_{jt}^s) = z_{jt}^s$
- 投資額決定戦略: $h^{(i)}(z_{jt}^s) = \left(\frac{\rho_{jt}^{(i)}}{\rho_{jt}^{(i)}} \right) z_{jt}^s$
- 投資比率決定戦略: $h^{(i)}(z_{jt}^s) = \left(\frac{W_t^{(i)}}{\rho_{jt}^{(i)}} \right) z_{jt}^s$

z_{jt}^s : t 時点の決定ノード s の危険資産 j への投資量の基礎変数。(決定変数)

$\rho_{jt}^{(i)}$: t 時点の経路 i の危険資産 j の価格。(パラメータ)

$W_t^{(i)}$: t 時点の経路 i の富。(決定変数とパラメータで記述できる変数。定式化上は決定変数扱い。)

3 投資比率決定戦略の計算アルゴリズム

非線形計画問題として記述される投資比率決定戦略の最適解を求める計算アルゴリズムを以下に示す。

Step 1: 投資量決定戦略によって、最適解を求める。最適解から t 時点の経路 i の富 $W_t^{(i)*}$ を計算する。目的関数値を Obj_0 とし、 $k = 1$ とする。

Step 2: 投資量関数として、 $h^{(i)}(z_{jt}^s) = \left(\frac{W_t^{(i)*}}{\rho_{jt}^{(i)}} \right) z_{jt}^s$

を用いて、最適解を求め、 t 時点の経路 i の富 $W_t^{(i)(k)}$ を計算する。目的関数値を Obj_k とする。

Step 3: $Obj_k - Obj_{k-1}$ の値が許容値を下回れば、終了。さもなければ、 $k \leftarrow k + 1$ として、Step 2 へ。

表 1: 改善率 $IR(k)$

| γ | 10 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1.5 | 1 | 0.8 |
|----------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| # 1 | 99.2% | 96.1% | 95.1% | 95.3% | 95.1% | 95.6% | 95.1% | 95.0% |
| # 2 | 0.6% | 3.8% | 4.6% | 4.6% | 4.7% | 4.2% | 4.8% | 4.9% |
| # 3 | 0.2% | 0.1% | 0.2% | 0.1% | 0.2% | 0.2% | 0.1% | 0.2% |
| # 4 | 0.1% | -0.1% | 0.0% | 0.1% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| # 5 | 0.0% | 0.0% | 0.0% | -0.1% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| CIR(2) | 99.8% | 100.0% | 99.7% | 99.9% | 99.8% | 99.8% | 99.8% | 99.8% |

| γ | 0.6 | 0.5 | 0.4 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | max | Ave. |
|----------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|
| # 1 | 94.3% | 94.4% | 94.4% | 94.3% | 100.0% | 91.2% | 85.9% | 94.7% |
| # 2 | 5.5% | 5.4% | 5.5% | 5.6% | 0.0% | 8.3% | 13.3% | 5.1% |
| # 3 | 0.1% | 0.1% | 0.1% | 0.1% | 0.0% | 0.4% | 0.8% | 0.2% |
| # 4 | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| # 5 | 0.0% | 0.1% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% | 0.0% |
| CIR(2) | 99.8% | 99.9% | 99.9% | 99.9% | 100.0% | 99.5% | 99.2% | 99.8% |

γ : リスク回避係数

$$IR(k) = \frac{Obj_k - Obj_{k-1}}{Obj_5 - Obj_0}, \quad CIR(k) = \sum_{i=1}^k IR(i)$$

※ $CIR(5) = 100\%$ とする。

このアルゴリズムは、大域的最適解の導出を保証しない点に注意が必要である。ただし、各時点の意思決定ノード内の各経路の投資比率は、2回目の反復 ($k = 2$) で、ほぼ同じ値をとり、投資比率決定戦略を採ることができている。各時点のノードごとに投資比率の標準偏差を計算すると、平均的に1回目 0.09%, 2回目 0.02%, 3回目 0.02% となった (投資量決定戦略の場合 1.60%)。

4 モデルの比較方法

比較する2つのモデルは図1に示すように、シナリオ構造が異なるので、一般に直接的にモデルを比較できない。本研究では以下に示す方法で比較を行う。

Step 1: 混合型モデル・投資比率決定戦略の(近似)計算アルゴリズムにより最適投資比率を求め、効率的フロンティアを生成する。

Step 2: 混合型モデルで用いるシミュレーション経路上の収益率データからシナリオ・ツリー上の価格を計算する。

Step 3: シナリオ・ツリー型モデルにより問題を解き、最適解(投資量)を求める。最適投資量から最適投資比率を計算する。

Step 4: 最適投資比率を混合型モデル・投資比率決定戦略の解と見なし、シミュレーション経路上の収益率データを用いて、期待最終富とリスク (LPM_1) を計算する。

Step 5: それらを混合型モデル・投資比率決定戦略の計算アルゴリズムにより得られた期待最終富、リスク (LPM_1) と効率的フロンティア上で比較する。

5 数値実験

設定条件

- 4期間、4資産(現金、株式、債券、CB)
- シミュレーション経路数: 10,000本
- 経路生成方法: 基本ケース、相関ケース

ケース分析

- ◆ ケース A1: 5-4-3 ツリー (基本ケース)
- ◇ ケース B1: 5-4-3 ツリー (相関ケース)
- ◆ ケース A2: $N-N-N$ ツリー (基本ケース)
- ◆ ケース A3: $N_1-N_2-N_3$ ツリー (基本ケース)
 $N_1 \times N_2 \times N_3 = \text{一定}$ (3時点のノード数が一定)

6 おわりに

数値実験によって、混合型モデルはシナリオ・ツリー型モデルに比べて、リスクを適切に評価し、管理できることが分かった。

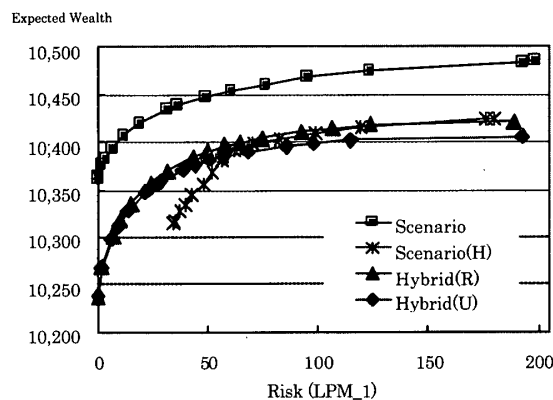


図2: Case A1: 効率的フロンティア

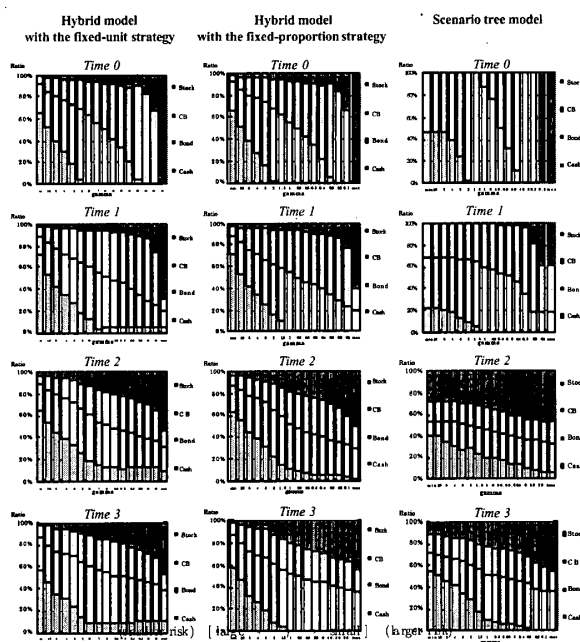


図3: Case A1: 平均最適投資比率

参考文献

- [1] 枇々木規雄: Multi-period Stochastic Optimization Models for Dynamic Asset Allocation, 日本金融・証券計量・工学会 2003年冬季大会予稿集, pp. 243-264.
- [2] Norio Hibiki, Hybrid Simulation/Tree Stochastic Optimization Model for Dynamic Asset Allocation, Chapter 14 in "Asset and Liability Management Tools: A Handbook for Best Practice", edited by B. Scherer, Risk Books, pp.269-294, 2003.
- [3] 枇々木規雄: 最適資産配分問題に対するシミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル. 高橋一編, ジャファイア・ジャーナル [2001] 金融工学の新展開 (東洋経済新報社, 2001), pp.89-119.
- [4] 枇々木規雄: 戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル. *J.O.R.S.J.*, 44-2(2001), pp.169-193.
- [5] 枇々木規雄: 金融工学と最適化, 朝倉書店, 2001.
- [6] W.T. Ziemba and J.M. Mulvey, *Worldwide Asset and Liability Modeling*, Cambridge University Press, 1998.

著者の論文は以下のホームページからすべてダウンロード可能である。
<http://www.ae.keio.ac.jp/lab/soc/hibiki/profile.2/paper.fe.htm>