

# 複数のベンチマークをもつ ポートフォリオ選択問題とその特性

03000230 MTEC 磯貝 明文 ISOGAI Akifumi

## 摘要

株式市場全体を表す市場インデックス以外に、大型インデックスやバリューインデックスのようなベンチマークインデックス、さらに近年では資産運用の高度化に伴ってカスタムベンチマークなるインデックスが、証券取引所や証券会社、運用評価会社等から提供されている。これらのベンチマークインデックスは、投資スタイルという概念に基づいて開発されたものである。投資スタイルとは、投資家の運用方針を体系化したものの [福島 2002] で、運用を委託する年金スポンサー、運用を委託される運用機関のどちらにとっても重要な考え方である。具体的に、年金スポンサーにとっての投資スタイルとは、リスク管理と運用機関（ファンドマネージャー）のパフォーマンス評価を行うためのものであり、一方運用機関にとっての投資スタイルとは、自ら超過収益の源泉を明確化するためのものである。

本報告では、運用サイドの観点から、複数のベンチマークを考慮する必要があるファンドにおけるポートフォリオ (Multiple Benchmark Portfolio, 以下 MBP) の選択問題を定式化し、我が国の株式市場でそのポートフォリオ特性について、従来の手法で構築される Single Benchmark Portfolio (SBP) と比較しながら考察する。

## 1 記法

### 問題変数

- $w_i^P$  : 銘柄  $i$  のポートフォリオウェイト
- $z_i$  : 銘柄  $i$  の対市場超過ウェイト
- $y_{mi}^*$  :  $m$  セグメント内銘柄  $i$  ウェイト
- $z_{mi}^*$  :  $m$  セグメント内  
銘柄  $i$  超過ウェイト
- $\beta_k$  : 対市場超過  $k$  ファクター感応度
- $\beta_{km}^*$  :  $m$  セグメント内  
超過  $k$  ファクター感応度

### 既知として与えられる主な変数

- $w_i^T$  : 銘柄  $i$  の市場  
ベンチマークウェイト
- $y_{mi}^{**}$  : 銘柄  $i$  の  $m$  セグメント内  
ベンチマークウェイト
- $b_{ki}$  : 銘柄  $i$  のファクター  $k$  感応度
- $\text{Cov}(f_k, f_l)$  : ファクター  $k, l$  間の共分散
- $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_i)$  : 銘柄  $i$  リスク
- $\sigma_{\text{TOPIX}}^2$  : 許容市場超過リスク
- $\sigma_m^2$  : 許容  $m$  セグメント内超過リスク
- $\alpha_{im}$  :  $m$  セグメントアルファ

## 2 MBP モデリング

ユニバース (市場全体)  $U$  とセグメント  $G_m$  ( $m = 1, \dots, M$ ) において、

$$U = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_M, \quad G_p \cap G_q = \emptyset$$

を考える。

$m$  セグメント内ベンチマークリターン、ポートフォリオの  $m$  セグメント構成ウェイトを、

$$r_m = \sum_{i \in G_m} y_{mi}^{**} r_i, \quad w_m^P = \sum_{i \in G_m} w_i^P$$

とおくとポートフォリオ市場超過リターン  $r_p - r_T$  は

$$\sum_{m=1}^M w_m^P (r_m - r_T) + \sum_{m=1}^M w_m^P \sum_{i \in G_m} y_{mi}^* (r_i - r_m) \quad (1)$$

と表され、ポートフォリオの市場超過リスク  $V(r_p - r_T)$  (以下、超過リスクを Tracking Error, TE) は、

$$\begin{aligned} & V\left(\sum_{m=1}^M w_m^P (r_m - r_T)\right) \\ & + \sum_{m=1}^M (w_m^P)^2 V\left(\sum_{i \in G_m} y_{mi}^* (r_i - r_m)\right) + \Delta_1 + 2\Delta_2 \end{aligned} \quad (2)$$

と分解できる。ここで、第一項、第二項はそれぞれ、セグメント TE に関わる項（各セグメント TE とセグメント間 TE の総和）、セグメント内 TE に関わる項（各セグメント内 TE のウェイト二乗和）に対応する。第三項  $\Delta_1$ 、第四項の  $\Delta_2$  はそれぞれ、

$$\sum_{m \neq m'} w_m^P w_{m'}^P \left( \sum_{\substack{i \in G_m, \\ j \in G_{m'}}} y_{mi}^* y_{m'j}^* \text{Cov}(r_i - r_m, r_j - r_{m'}) \right),$$

$$\sum_{m, m'} w_m^P w_{m'}^P \left( \sum_{j \in G_{m'}} y_{mi}^* y_{m'j}^* \text{Cov}(r_m - r_T, r_j - r_{m'}) \right).$$

ここで、個別銘柄  $i$  のリターンがマルチファクターモデルを用いて

$$r_i - r_f = \sum_{k=1}^K b_{ki} f_k + \varepsilon_i, \quad (3)$$

$$\text{Cov}(f_k, \varepsilon_j) = 0, \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad \forall k, i, j$$

と表現できるとすると、セグメント TE ( $\sigma_C$ )<sup>2</sup>、セグメント内 TE ( $\sigma_{I,m}$ )<sup>2</sup> は、それぞれ

$$\sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \beta_k \beta_l \text{Cov}(f_k, f_l) + \sum_{m=1}^M (z_m)^2 \text{Cov}(\varepsilon_m, \varepsilon_m), \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \beta_{km}^* \beta_{lm}^* \text{Cov}(f_k, f_l) + \sum_{i \in G_m} (z_{im}^*)^2 \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_i) \quad (5)$$

と表現できる。ここで、 $z_m$ 、 $\text{Cov}(\varepsilon_m, \varepsilon_m)$  はそれぞれ、 $m$  セグメントの対市場超過ウェイト、 $m$  セグメントのスペシフィックリスクを表す。

## 2.1 定式化

MBP モデリングの一つの目的は、市場 TE (式 (2) 全体)、セグメント TE (式 (2) の第一項)、セグメント内 TE (式 (2) の第二項の構成要素) のそれぞれを明示的に管理することであり、よって定式化は制約条件に二次制約を課す形をとる。今回は、ポートフォリオの保有条件として、

$$\sum_{i \in G_m} w_i^P = \sum_{i \in G_m} w_i^T \quad (6)$$

が成り立つ戦略を採用する。すなわち、セグメントニュートラル戦略の採用を意味し、式 (2) の第一項 (式 (4)) がゼロとなる場合を考える。この場合の MPT モデリングは凸計画問題のクラスとなる。なお、問題の求解には NUOPT(数理システム) を利用している。

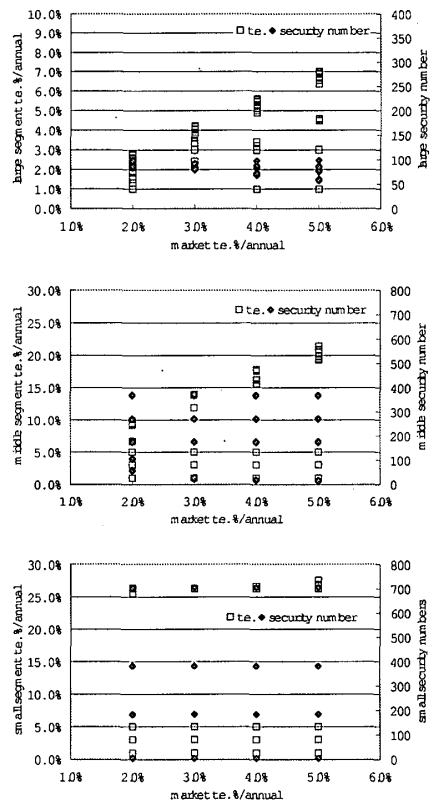
## 3 MBP の特性分析

以下のグラフは、SBP と MBP の特性を、TE (%/年)、銘柄数の視点から比較した結果である。ここで、ユニバース  $U$  は東証 1 部上場銘柄群、セグメントは、時価総額で 3 分割し、時価総額上位 100 銘柄を  $G_1$ 、時価総額 101 番～500 番を  $G_2$ 、時価総額 501 番以降を  $G_3$  としている。市場 TE が同水準で、SBP と MBP の特性が異なることが確認できる。これらの詳細な考察やその他の特性については当日報告する。

表 1: SBP のユニバース及び各セグメントの特性

$U$	$G_1$	$G_2$	$G_3$
0.25%(757)	0.06%(100)	0.63%(398)	5.27%(255)
0.5%(556)	0.14%(100)	1.49%(386)	11.07%(67)
1.0%(424)	0.38%(99)	2.62%(313)	18.73%(10)
2.0%(211)	1.32%(97)	6.68%(107)	25.42%(6)
3.0%(127)	2.42%(98)	5.85%(29)	26.31%(4)
4.0%(104)	3.39%(83)	23.22%(17)	26.29%(4)
5.0%(97)	4.47%(79)	19.25%(14)	26.36%(4)

図 1: MBP の各セグメント特性 (上から  $G_1, G_2, G_3$ )



## 参考文献

- [1] 福島 和子, 株式投資スタイル運用とベンチマーク, 証券アナリストジャーナル, Aug., 2002.