日本オペレーションズ・リサーチ学会
2004年秋季研究発表会

修正ANP法による相互評価問題の解法

01105803　愛知学院大学　岸　善徳　KISHI Yoshinori

1．はじめに

AHP（Analytic Hierarchy Process）では総合目標、評価基準、代替案が階層構造となっていて、評価基準と代替案との間は独立であるべきだと定めているが、現実には評価基準と代替案との間の依存関係を組み込んだ形で評価せざるを得ない場合がある。そこで、サーティはAHPにおける階層構造をネットワーク構造に拡張したANP（Analytic Network Process）を提案した。しかし、先生と学生の相互評価の例[2]では異常な結果が出ている。そこで、岸は正規化の手法を変更して、相互の評価基準行列を列の最大要素を１にする基準化を行う修正ANP法[3]を提案している。これは、AHPに対するベルトン・ギアーの提案[1]をANPに適用したものである。

この報告では、[2]、[3]で検討されたいくつかの例を基に、先生と学生の相互評価の例を別のタイプにまで拡げて、それぞれのタイプにANP法および修正ANP法を適用する。そして、どの場合にもANP法では異常な結果となることを示す。一方、修正ANP法では合理的な結果が得られることを示す。

2．ANP法に対する評価行列

先生による学生ｎ人の評価行列として次の$W0p$、$W1p$を考える。一方、学生による先生m人の評価行列として次の$V0q$、$V1q$を考える。ここで、$0 \le p \le 1/n$、$0 \le q \le 1/m$で、$\bar{P} = 1-(n-1)p$、$Q = 1-(m-1)q$とおく。

$$W0p = \begin{bmatrix} \bar{P} & 0 & \cdots & 0 \\ p & 1/n-1 & \cdots & 1/n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p & 1/n-1 & \cdots & 1/n-1 \end{bmatrix}$$

$$W1p = \begin{bmatrix} \bar{P} & 1/n & \cdots & 1/n \\ p & 1/n & \cdots & 1/n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p & 1/n & \cdots & 1/n \end{bmatrix}$$

$$V0q = \begin{bmatrix} Q & 0 & \cdots & 0 \\ q & 1/m-1 & \cdots & 1/m-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q & 1/m-1 & \cdots & 1/m-1 \end{bmatrix}$$

$$V1q = \begin{bmatrix} Q & 1/m & \cdots & 1/m \\ q & 1/m & \cdots & 1/m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q & 1/m & \cdots & 1/m \end{bmatrix}$$

これに対して先生の総合得点をｘ、学生の総合得点をｙとして、次のように設定する。

$$x^T = [\xi \quad u \quad \cdots \quad u] \quad y^T = [\eta \quad v \quad \cdots \quad v]$$

ここで、ξは先生１の総合得点、ｕはその他の先生の総合得点である。また、ηは学生１の総合得点、ｖはその他の学生の総合得点である。それぞれの総合得点を、要素の合計が１になるように正規化する。ここでのｘ、ｙに対しては次のようになる。

$$\xi + (m-1)u = 1 \quad \eta + (n-1)v = 1$$

3．修正ANP法に対する評価行列

先生による学生ｎ人の評価行列として次の$\overline{W}0p$、$\overline{W}1p$を考える。一方、学生による先生m人の評価行列として次の$\overline{V}0q$、$\overline{V}1q$を考える。ここで、$r = \frac{p}{\bar{P}} = \frac{p}{1-(n-1)p}$、$t = \frac{q}{Q} = \frac{q}{1-(m-1)q}$とおく。$0 \le r \le 1$、$0 \le t \le 1$である。

$$\overline{W}0p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ r & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \overline{W}1p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{V}0q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ t & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \overline{V}1q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

これに対して先生の総合得点を$\bar{x}$、学生の総合得点を$\bar{y}$として、次のように設定する。

$$\bar{x}^T = [\bar{\xi} \quad \bar{u} \quad \cdots \quad \bar{u}] \quad \bar{y}^T = [\bar{\eta} \quad \bar{v} \quad \cdots \quad \bar{v}]$$

ここで、$\bar{\xi}$は先生１の総合得点、$\bar{u}$はその他の先生の総合得点である。また、$\bar{\eta}$は学生１の総合得点、$\bar{v}$はその他の学生の総合得点である。それぞれの総合得点を、要素の合計が１になるように正規化する。ここでの$\bar{x}$、$\bar{y}$に対しては次のようになる。

$$\bar{\xi} + (m-1)\bar{u} = 1 \quad \bar{\eta} + (n-1)\bar{v} = 1$$

4．相互評価問題の解

相互評価行列に対して、次のタイプの解を求める。

タイプ１　：$W0p$、$V0q$ と $\overline{V}0q$、$\overline{W}0p$

タイプ２　：$W0p$、$V1q$ と $\overline{W}0p$、$\overline{V}1q$

タイプ３　：$W1p$、$V1q$ と $\overline{W}1p$、$\overline{V}1q$

なお、修正ANP法での式を簡略にするため、$k = (m-1)(n-1)$を使用する。

４．１．ａ　タイプ１のANP法の解

1　ξ＝0、$u = 1/m-1$

2　η＝0、$v = 1/n-1$

４．１．ｂ　タイプ１の修正ANP法の解

1　λ＝k

2　$\bar{\xi} = 0$、$\bar{u} = 1/m-1$

3　$\overline{\eta}=0$、$\overline{v}=1/n-1$

4．2．a　タイプ2のANP法の解

1　$u=(m\overline{P}q+(n-1)p)\xi \underset{p\to 0,q\to 0}{\longrightarrow} 0$

2　$v=\dfrac{m(1-\overline{P}Q)}{(n-1)\overline{P}}\eta \underset{p\to 0,q\to 0}{\longrightarrow} 0$

4．2．b　タイプ2の修正ANP法の解

1　$k\le\lambda\le k+1+(n-1)r$

2　$\overline{\xi}=\dfrac{n-1}{\lambda+n-2-(n-1)r}$

$\dfrac{1}{m}\le\overline{\xi}\le\dfrac{n-1}{k+n-2-(n-1)r}$

3　$\overline{\eta}=1/\lambda$、$1/(k+1)\le\overline{\eta}\le 1/k$

4　$(1-\dfrac{1+(n-1)r}{k})\overline{\xi}\le\overline{u}\le\overline{\xi}$

5　$\dfrac{k-1}{n-1}\overline{\eta}\le\overline{v}\le(m-1+r)\overline{\eta}$

4．3．a　タイプ3のANP法の解

1　p＝0のとき $u=\dfrac{mnq}{mQ+n-1}\xi \underset{q\to 0}{\longrightarrow} 0$

$v=\dfrac{m(m-1)q}{m+n-1}\eta \underset{q\to 0}{\longrightarrow} 0$

2　q＝0のとき $u=\dfrac{n(n-1)p}{m+n-1}\xi \underset{p\to 0}{\longrightarrow} 0$

$v=\dfrac{mnp}{n\overline{P}+m-1}\eta \underset{p\to 0}{\longrightarrow} 0$

4．3．b　タイプ3の修正ANP法の解

1　$\max\left\{\begin{matrix}k+(n-1)r\\ k+(m-1)t\end{matrix}\right\}\le\lambda$

$\lambda\le k+1+(n-1)r+(m-1)t$

2　$\overline{\xi}=\dfrac{n}{\lambda+n-1-(n-1)r}$

$\dfrac{n}{k+n+(m-1)t}\le\overline{\xi}\le\dfrac{n}{m(n-1)}$

3　$\overline{\eta}=\dfrac{m}{\lambda+m-1-(m-1)t}$

$\dfrac{m}{k+m+(n-1)r}\le\overline{\eta}\le\dfrac{m}{n(m-1)}$

4　$(k-1)\overline{\xi}\le n(m-1)\overline{u}\le(k+(m-1)t)\overline{\xi}$

5　$(k-1)\overline{\eta}\le m(n-1)\overline{v}\le(k+(n-1)r)\overline{\eta}$

5．相互評価問題のまとめ

タイプ1

ANP法　　：$\xi=0$、$\eta=0$

修正ANP法：$\overline{\xi}=0$、$\overline{\eta}=0$

タイプ1では、どちらの場合も先生1，学生1の評価が0となり、納得できる結果ではない。従って、タイプ1の対してはANP法、修正ANP法とは別の手法を必要とする。

タイプ2

ANP法　　：$u \underset{p\to 0,q\to 0}{\longrightarrow} 0$、$v \underset{p\to 0,q\to 0}{\longrightarrow} 0$

修正ANP法：

$$\overline{u}\ge(1-\frac{1+(n-1)r}{k})\overline{\xi}\approx(1-\frac{1}{k})\overline{\xi}$$

$$\overline{v}\ge\frac{k-1}{n-1}\overline{\eta}\approx(m-1)\overline{\eta}$$

ANP法では、p→0、q→0とするとu、vが0に近づき、納得できる結果ではない。一方、修正ANP法では、合理的な結果を得ている。

タイプ3：

ANP法　　：p＝0のとき　$u \underset{q\to 0}{\longrightarrow} 0$、$v \underset{q\to 0}{\longrightarrow} 0$

q＝0のとき　$u \underset{p\to 0}{\longrightarrow} 0$、$v \underset{p\to 0}{\longrightarrow} 0$

修正ANP法：$\overline{u}\ge\dfrac{k-1}{n(m-1)}\overline{\xi}\approx\dfrac{n-1}{n}\overline{\xi}$

$$\overline{v}\ge\frac{k-1}{m(n-1)})\overline{\eta}\approx\frac{m-1}{m}\overline{\eta}$$

ANP法では、p＝0のときq→0とするとu，vが0に近づく。同じように、q＝0のときp→0とするとu，vが0に近づき、納得できる結果ではない。一方、修正ANP法では、合理的な結果を得ている。

いずれにしてもANP法ではどのタイプでも異常な結果となる。一方、修正ANP法では、タイプ1を除いて合理的な結果を得ている。しかし、タイプ1では$\overline{\xi}=0$、$\overline{\eta}=0$となり、修正ANP法でもタイプ1に対しては手法として適しているわけではない。

参考文献

[1] V. Belton and T. Gear: On a Shortcoming of Saaty's Method of Analytic Hierarchies. Omega , 11/3(1983) 228-230

[2] 加藤　豊: 意思決定における評価方法.オペレーションズリサーチ，48/4(2003) 253-258

[3] 岸　善徳: ANPにおける異常現象を解決する修正ANP法の提案　日本OR学会 2004 年春季研究発表会アブストラクト集 2-B-7(2004)